

Grundlagenfragen, Philosophie, Logik.

● **Fischer, Ludwig:** Die Grundlagen der Philosophie und der Mathematik. Leipzig: Felix Meiner 1933. VII, 180 S. RM. 8.—

Im ersten Abschnitt seines Werkes behandelt der Verf. den axiomatischen Aufbau der Philosophie, den er auf einen „viergliedrigen Urkomplex“ begründet, der den quantitativen Urbegriff der Vielheit, den modalen der Ordnung, den relationalen des Gegensatzes und den qualitativen der Bestimmtheit enthält. — Der zweite, mathematische Abschnitt befaßt sich mit den Paradoxien und angeblichen Widersprüchen der Cantorsche Mengenlehre, und zwar auch außerhalb des Bereichs der allbekannten Antinomien. Das Aktualunendliche, insbesondere das Kontinuum und weiterhin Beweisarten wie das Diagonalverfahren, die Beweise des Wohlordnungssatzes u. dgl., glaubt der Verf. als widerspruchsvoll nachweisen zu können, auf Grund zumeist bekannter, in einzelnen Fällen vielleicht aber neuer Überlegungen, die dem Ref. zwar gewisse Paradoxien, aber wohl in keinem Falle einen eigentlichen Widerspruch aufzuzeigen scheinen. Brouwers intuitionistische Mengenlehre und auch Hilberts formalistische Auffassung wird dagegen für widerspruchsfrei gehalten. Am Schluß seiner Erörterungen erklärt Verf. das (aktual) Unendliche als Fiktion im Sinne von Vaihingers „Philosophie des Als-Ob“. — Ein dritter Abschnitt enthält endlich sprachkritische Betrachtungen im Hinblick auf die mengentheoretischen und arithmetisch-logischen Grundbegriffe, die in eine Verurteilung der „unzulänglichen“ Formulierungen Cantors, Russells, Zermelos, Hilberts ausmünden.

Oskar Becker (Bonn).

Wajsberg, M.: Beitrag zur Metamathematik. Math. Ann. 109, 200—229 (1933).

Der Verf. konstruiert eine abzählbar unendliche Menge \mathfrak{E} von Formeln, die alle dem Formalismus des „engeren Funktionenkalküls“ (Hilbert-Ackermann, Grundzüge...) angehören und im Endlichen identisch (vgl. dies. Zbl. 6, 242) sind, deren keine jedoch aus den Axiomen des engeren Funktionenkalküls und den übrigen Formeln von \mathfrak{E} mit den Schlußregeln dieses Kalküls abgeleitet werden kann. Bezeichnet man jede Formelmengemenge aus dem Formalismus eines Kalküls, die die Axiome des Kalküls umfaßt und nach seinen Regeln abgeschlossen ist, als „System“ dieses Kalküls, so folgt: es gibt genau 2^{\aleph_0} „Systeme“ des engeren Funktionenkalküls, in Tarskischer Bezeichnung: der Vollständigkeitsgrad dieses Kalküls ist 2^{\aleph_0} . — Auf wesentlich kürzerem Wege läßt sich die gleiche Eigenschaft für den weiteren Funktionenkalkül und unter einer Widerspruchsfreiheitsannahme für den Kalkül der Principia Mathematica (in der Gödelschen Formalisierung P) — mit Benutzung eines Gödelschen Resultates — herleiten.

Arnold Schmidt (Göttingen).

Diamond, A. H.: The complete existential theory of the Whitehead-Huntington set of postulates for the algebra of logic. Trans. Amer. Math. Soc. 35, 940—948 (1933).

Jedem der 10 Whitehead-Huntington'schen Axiome für die Algebra der Logik (Trans. Amer. Math. Soc. 1904) sei einer der Werte „gültig“, „ungültig“ beigelegt; gibt es eine Interpretation (a concrete system), die dieser Wertverteilung Genüge leistet? Verf. beantwortet diese Frage für alle 2^{10} Wertverteilungen („complete existential theory“ des gegebenen Axiomensystems). Allgemeine Abhängigkeiten kürzen die Untersuchung ab; immerhin bleiben noch 325 concrete systems, die bis auf einige Ausnahmen paarweise dual sind und deren jedes aus höchstens drei Elementen besteht.

Arnold Schmidt (Göttingen).

Bernstein, B. A.: Simplification of the set of four postulates for Boolean algebras in terms of rejection. Bull. Amer. Math. Soc. 39, 783—787 (1933).

Vereinfachung und „complete existential theory“ (vgl. vorst. Ref.) eines in Trans. Amer. Math. Soc. 1917 vom Verf. aufgestellten (aus 4 Axiomen bestehenden) Axiomensystems der Booleschen Algebra nebst einigen Ableitungen, die seine Handlichkeit erweisen sollen.

Arnold Schmidt (Göttingen).

Bernstein, B. A.: On Section A of Principia Mathematica. Bull. Amer. Math. Soc. **39**, 788—792 (1933).

Die Behauptung, die Whitehead-Russellsche Theorie sei für Klassen und Aussagen „inadequate“ (dies. Zbl. **5**, 146 und **6**, 97), dehnt der Verf. nun auch auf diejenigen Axiomensysteme aus, die Huntington (dies. Zbl. **6**, 242) als Verbindung zwischen der Boolean Algebra und der Section A der Principia Mathematica konstruierte. Der Haupteinwand Bernsteins ist: Die Huntingtonschen Axiome sind erfüllt, wenn der Dingbereich leer ist; die Boolean Algebra fordert aber ein Ding u , so daß für alle Dinge a gilt: $au = a$. Eine solche Existenzaussage gehört definitionsgemäß der Section A der Principia (s. S. XIV) nicht an. *Arnold Schmidt* (Göttingen).

Goldziher, K.: Contributi alla teoria della funzione logistica. Giorn. Ist. Ital. Attuari **4**, 530—561 (1933).

García, David: Systematische Klassifikation der logischen Eigenschaften. Rev. mat. hisp.-amer., II. s. **8**, 114—145 (1933) [Spanisch].

Stotz, Hans: Die Welt der physikalischen Theorien. Die Formen und Prinzipien ihrer Konstruktion. Gießen: Diss. 1932. 173 S.

Die Dissertation geht aus von den Erlebnissen und gewissen Grundrelationen, die sie verknüpfen, und konstruiert aus ihnen die Wahrnehmungsdinge, die geometrischen Gebilde, die physikalischen Körper und Vorgänge und insbesondere die Gebilde der allgemeinen Relativitätstheorie. Die Naturgesetze werden dabei als Konstruktionsprinzipien aufgefaßt. Der Aufbau verwendet die logistische Symbolik der Principia mathematica, wird jedoch meist nur skizziert. Er stützt sich unter manchen Abweichungen in den Einzelheiten auf die Ergebnisse Carnaps, Russells und Reichenbachs.

E. Zilsel (Wien).

Geschichtliches.

Lietzmann, W.: Geometrie und Prähistorie. Isis **20**, 436—439 (1934).

Enriques, F.: L'infinito nella storia del pensiero. Scientia **54**, 381—401 (1933). Kurze Übersicht über die Geschichte des Unendlichkeitsbegriffes in Mathematik, Physik und Philosophie, vom Altertum bis zur Gegenwart. *O. Neugebauer*.

● **Menninger, Karl:** Zahlwort und Ziffer. Aus der Kulturgeschichte unserer Zahlsprache, unserer Zahlschrift und des Rechenbretts. Breslau: Ferdinand Hirt 1934. X, 365 S. u. 170 Abb. RM. 7.—.

Das Buch setzt sich das Ziel, die Verflechtung der Zahl mit dem Leben eines Volkes und dem Werden seiner Kultur zur Anschauung zu bringen. Hierzu trägt es umfangreiches Material aus den verschiedensten Zeiten und von den verschiedensten Völkern zusammen, das in ansprechender Form vorgetragen wird, wobei zahlreiche sorgfältig ausgewählte und gut reproduzierte Bilder das Vergnügen und das Verständnis des Lesers erhöhen. Aus den vielen Einzelheiten baut sich ein Bild der geistigen Eigenart und Entwicklung der Menschheit schlechthin auf. Dem Fachmann auf dem Gebiet der Wissenschaftsgeschichte bietet das Buch weit mehr, als das Vorwort erwarten läßt. — Inhalt: Die Zählreihe (Arten zu zählen und die fortlaufende Reihe der Zahlen zur Erhöhung der Übersichtlichkeit in Abschnitte zu gliedern). Unsere Zahlwörter (Vergleichung der Zahlwörter der indogermanischen Sprachen u. a.). Fingerzahlen. Zahlzeichen des Volkes (Kerbhölzer, Bauernzahlen, Knoten). Die Buchstabenziiffern der Goten. Die römischen „deutschen“ Zahlzeichen (Abwandlung und Gebrauch der römischen Zahlzeichen im Mittelalter). Das Rechenbrett (seine Geschichte und seine Abarten). Unsere Zahlschrift (Vorgeschichte der heutigen Positionsschrift mit 10 Ziffern und Wandlung der Gestalten dieser Ziffern). Zahlwort und Ziffer (kurzes Nachwort). *Bessel-Hagen* (Bonn).

Gāṅguli, Sārādākānta: On the Indian discovery of the irrational at the time of Śulvasūtras. Scripta Math. **1**, 135—141 (1932).

Der Kernpunkt der Mitteilung besteht in der Feststellung, daß die Śulvasūtras nicht nur einen angenäherten Wert für $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}$ geben, sondern daß sie eine allgemeine Methode besaßen, die sie für die Quadratwurzel jeder Nichtquadratzahl sukzessive Näherungswerte finden ließ. Zum Beweis hierfür wird

eine wichtige, korrupte Stelle des Bakhshālī Manuskriptes zum Teil neu gelesen und interpretiert. Der Verf. trifft in seinem Resultate mit den Ergebnissen überein, die Ref. in seiner Abhandlung: *Die Mathematik der Śulvasūtras*, Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 7, 173—204 (1929) gewonnen hat. Nur ist es nicht richtig, wenn die These von A. Bürk wieder aufgenommen wird, daß die Inder zur Zeit des Śulvasūtras „das Irrationale entdeckt hätten“. Denn daß $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl, beweisen sie nicht. (Die Angabe von Näherungswerten genügt nicht, wenn nicht bewiesen wird, daß sie nach keiner Rationalzahl konvergieren.) C. Müller (Hannover).

Gāṅgūlī, Śārādākānta: *The Indian origin of the modern place-value arithmetical notation.* IV. Amer. Math. Monthly 40, 154—157 (1933).

Das frühere Ergebnis von dem indischen Ursprung der arithmetischen Stellenwertbezeichnung wird gegenüber der Kayeschen gegenteiligen Auffassung hier weiterhin dadurch erhärtet, daß die Ergebnisse der Epigraphie (datierte Schenkungsurkunden auf Kupferplatten) mitgeteilt und kritisch beleuchtet werden. Einzelne dieser Inschriften aus dem 5. bzw. 6. Jahrhundert n. Chr. als gefälscht anzunehmen, widerspricht der Auffassung aller namhaften Epigraphiker wie Bühler, Kielhorn, V. A. Smith, Bhandarkar und Thibaut. (III. vgl. dies. Zbl. 6, 145.) C. Müller.

Richeson, A. W.: *The number system of the Mayas.* Amer. Math. Monthly 40, 542—546 (1933).

Smith, David Eugene: *Early American mathematics.* Tōhoku Math. J. 38, 227 bis 232 (1933).

Karpinski, Louis C.: *Arithmetic centenarians: Textbooks with a long life.* Scripta Math. 2, 34—40 (1933).

Karpinski bringt aus dem Bestande der berühmten Michigan-Bibliothek eine interessante Liste „langlebiger“ Rechenbücher, geordnet nach den Ländern. Vielleicht wären dabei Clavius und Gemma Frisius mehr für Deutschland als für Italien bzw. die Niederlande in Anspruch zu nehmen. Natürlich denkt K. nicht daran, mit dieser Zusammenstellung einen Schluß aus der „Langlebigkeit“ auf die Größe des Einflusses für die Entwicklung des Rechnens ziehen zu wollen. Tropke (Berlin).

● **Zeuthen, H. G.:** *Geschichte der Mathematik im 16. und 17. Jahrhundert.* Aus dem Deutschen übers. v. P. Nowikoff. Hrsg. mit Anmerkungen u. Vorwort versehen v. M. Wygodsky. Moskau u. Leningrad: Staatl. Techn.-Theoret. Verl. 1933. 429 S. u. 53 Abb. [Russisch].

Algebra und Zahlentheorie.

Schumjagski, B.: „Schoirosrechnung“. Rec. math. Moscou 40, 394—409 u. dtsh. Zusammenfassung 409 (1933) [Russisch].

Verf. führt die Benennung „Schoirosch“ n -ter Ordnung ein für die positive Wurzel der Gleichung $x^n + Ax - A = 0$, wobei A eine reelle Größe („Misor“) ist. Diese Termini sind aus der hebräischen Sprache entnommen. — Verf. drückt die Lösung einer allgemeinen trinomischen Gleichung durch Schoirosch- und Wurzeloperationen aus. Sodann entwickelt er einige einfache Methoden der Berechnung der Schoiroschim. Zum Schluß werden die evidenten Relationen zwischen den kubischen Wurzeln und den Schoiroschim und zwischen den quadratischen Schoiroschim und den periodischen Kettenbrüchen aufgestellt.

N. Tschebotarōw (Kasan).

Rudnicki, Jules: *Sur un théorème de Mr J. L. Walsh.* Ann. Soc. Polon. math. 11, 14—18 (1933).

Beweis des folgenden Satzes von R. D. Carmichael [Bull. Amer. Math. Soc. 24, 293 (1917—1918); J. L. Walsh, Ann. of Math. (2) 25, 285—286 (1924)]: Die Wurzeln der algebraischen Gleichung $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ sind dem absoluten Betrage nach $\leq R = |a_1| + \sqrt[n]{|a_2|} + \dots + \sqrt[n]{|a_n|}$. Der einfachere Beweis von Car-

michael scheint dem Verf. unbekannt zu sein. Außerdem beweist Verf., daß die Wurzeln der Gleichung alle im kleinsten konvexen Bereiche liegen, der die Kreise vom Halbmesser $R - |a_1|$ und mit den Mittelpunkten 0 und $-a_1$ enthält. Sz. Nagy.

Sz. Nagy, Julius v.: Über die Lage der nichtreellen Nullstellen von reellen Polynomen und von gewissen reellen ganzen Funktionen. J. reine angew. Math. **170**, 133—147 (1933).

Fourier behauptete, daß jedem „Fourierschen“ kritischen Punkte [für einfachste Fälle ein negatives Maximum oder ein positives Minimum eines reellen Polynoms $F(z)$] ein Paar seiner nichtreellen Nullstellen entspricht. Gauß (Werke, **3**, 120) bezweifelte einen solchen „willkürfreien“ Zusammenhang. — Verf. gibt Aufschluß über diese Frage, indem er jedem kritischen Punkt erster Ordnung [d. h. einem reellen Punkt, für welchen $F(x) \neq 0$, $K(x) = F(x)F''(x) - F'^2(x) \geq 0$ gilt] ein im allgemeinen endliches Gebiet zuordnet, das mindestens ein Paar konjugiert komplexer Nullstellen von $F(z)$ enthält. Dabei betrachtet er nebst den Polynomen auch ganze transzendente Funktionen vom Geschlecht 1^* , d. h. Funktionen vom Typ $F(z) = e^{-\gamma z^2} \cdot f(z)$, wobei $\gamma \geq 0$ und $f(z)$ eine ganze transzendente Funktion vom Geschlecht ≤ 1 ist. Er geht von der Formel $K(z) = F^2(z) \left[-2\gamma - \sum \frac{1}{(z - \alpha_n)^2} \right]$ aus und bekommt viele interessante Sätze über die Lage der Nullstellen, unter denen die folgenden besonders bemerkenswert sind: VIII. Ist x ein kritischer Punkt erster Ordnung in bezug auf $F(z)$, so liegt im Winkelraume W_x ($|\eta| \geq |\xi - x|$), wobei $z = \xi + i\eta$, mindestens ein konjugiert komplexes Nullstellenpaar. XIV. Ist $\gamma > 0$ und enthält W_x höchstens 2 q nichtreelle Nullstellen von $F(z)$, so liegt mindestens ein Paar der Nullstellen von $F(z)$ im Innern der Bernoullischen Lemniskate $L\left(x; \sqrt{\frac{q}{\gamma}}\right)$ mit dem Doppelpunkt in x , mit vertikaler Hauptachse und mit dem Halbmesser $\sqrt{\frac{q}{\gamma}}$. XIX. Sind c_h, c_k zwei reelle Nullstellen von $F(z)$, zwischen denen kritische Punkte erster Ordnung enthalten sind, und enthält jeder Winkelraum W_x ($c_h < x < c_k$) je höchstens 2 q Nullstellen, so läßt sich ein endlicher mindestens zwei nichtreelle Nullstellen enthaltender Bereich B wie folgt bestimmen: Bedeutet E die Ellipse mit der Nebenachse (c_h, c_k) und der Exzentrizität $\sqrt{1 - \frac{1}{q}}$, so ist B die Hülle aller Lemniskatenbereiche, deren Hauptachsen die vertikalen Sehnen von E sind. — Analoge Sätze gelten für kritische Punkte p -ter Ordnung, d. h. Punkte, für welche $F(x) \neq 0$, $K_p(x) = F^{(p-1)}(x) \cdot F^{(p+1)}(x) - [F^{(p)}(x)]^2 \geq 0$ gilt ($p \geq 1$).

N. Tschebotaröw (Kasan).

Sz. Nagy, Julius v.: Über die nichtreellen Nullstellen von reellen ganzen Funktionen. J. reine angew. Math. **170**, 148—153 (1933).

Der Verf. verallgemeinert einige Resultate der vorigen Arbeit (s. das vorstehende Referat) für reelle ganze Funktionen von jedem endlichen Geschlecht. Er nennt $F(z)$ eine ganze Funktion vom Geschlecht p^* , wenn sie sich in der Form $F(z) = e^{-\gamma \cdot z^{p+1}} \cdot f(z)$ darstellen läßt, wo $f(z)$ eine reelle ganze Funktion vom Geschlecht $\leq p$ ist und $\gamma \geq 0$ bzw. γ reell ist, je nachdem p ungerade bzw. gerade ist. — Ist p ungerade, so bezeichnet er einen reellen Punkt x als einen kritischen Punkt p -ter Art in bezug auf eine reelle ganze Funktion $F(z)$ vom Geschlecht p^* , wenn die Ungleichungen

$$F(x) \neq 0, \quad H_p(x) = \frac{[F(x)]^{p+1}}{p!} \cdot \frac{d^{p+1} \log F(x)}{dx^{p+1}} \geq 0$$

erfüllt sind. — Jeder kritische Punkt p -ter Art bestimmt im allgemeinen einen endlichen Bereich, der mindestens ein Paar nichtreeller Nullstellen von $F(z)$ enthält. Dieser Bereich ist von den $p+1$ Ovalen einer Sinusspirale vom Index $p+1$ begrenzt. — Verf. zeigt, wie man in gewissen Fällen durch den Wert $H_p(x)$ einen Bereich für die nichtreellen Nullstellen von $F(z)$ auch dann bestimmen kann, wenn p gerade ist.

N. Tschebotaröw (Kasan).

Sz. Nagy, Gyula: Über die Lage der Nullstellen gewisser Minimpolynome. Mat. természett. Ért. 49, 1—13 u. dtsch. Zusammenfassung 14—15 (1933) [Ungarisch].

Unter Zugrundelegung eines für Polynome von der Form

$$A(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

definierten „Abweichungsbegriffes“ kann nach dem Minimum der Abweichungen sämtlicher $A(z)$ eines festen Grades n auf einer abgeschlossenen Menge E von der Null gefragt werden. Bezüglich der Extremalpolynome dieser Aufgabe stellt Verf. einige Nullstellensätze auf, die sich an die entsprechenden Sätze von Fejér [Math. Ann. 85, 41 (1922)] und Fekete-v. Neumann [Jber. Deutsch. Math.-Verein. 31, 125—138 (1922)] anschließen. Auch ein früherer Hyperbelsatz des Verf. über die Nullstellen der Ableitung eines Polynoms [Jber. Deutsch. Math.-Verein. 31, 150 (1922)] wird in dieser Richtung verallgemeinert.

Szegő (Königsberg, Pr.).

Anghelutza, Th.: Una estensione di un teorema di Hurwitz. Boll. Un. Mat. Ital. 12, 284—289 (1933).

Verf. beweist folgende Verschärfung eines Satzes von Hurwitz (Tôhoku Math. J. 4, 89): Die abs. Beträge der Wurzeln einer Gleichung $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = 0$ liegen zwischen ϱ und ϱ_1 , wobei ϱ und ϱ_1 die einzigen positiven Wurzeln der Gleichungen

$$A_0 - A_1 \varrho - A_2 \varrho^2 - \dots - A_{n-1} \varrho^{n-1} - A_n \varrho^n = 0$$

bzw.

$$A_0 + A_1 \varrho_1 + A_2 \varrho_1^2 + \dots + A_{n-1} \varrho_1^{n-1} - A_n \varrho_1^n = 0$$

sind und $A_i = |a_i|$ ist. Die Wurzeln ϱ bzw. ϱ_1 sind insbesondere die absolut kleinste bzw. die absolut größte Wurzel der ihnen entsprechenden Gleichungen. — Nehmen wir an, die a_i seien positiv und s, σ das größte bzw. das kleinste unter den Verhältnissen $\frac{a_0}{a_1}, \frac{a_1}{a_2}, \dots, \frac{a_{n-1}}{a_n}$, so ergibt die Anwendung dieses Ergebnisses auf die Polynome

$$(s - x)f(x) = s a_0 + (s a_1 - a_0)x + \dots - a_n x^{n+1}$$

bzw.

$$(\sigma - x)f(x) = \sigma a_0 - (a_0 - \sigma a_1)x - \dots - a_n x^{n+1}$$

den obenerwähnten Satz von Hurwitz. — Sind aber die a_i im allgemeinen komplex und $a = \min \left| \frac{a_{i-1}}{a_i} \right|$, $b = \max \left| \frac{a_{i-1}}{a_i} \right|$, so liegen die absoluten Beträge der Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ zwischen $\frac{a}{\alpha}$ und $b\alpha$, wobei α die einzige positive Wurzel der Gleichung $x^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \dots - x - 1 = 0$ bedeutet. N. Tschebotarow.

Fousianis, Chr.: Sur un théorème de MM. Carathéodory et Féjér. C. R. Acad. Sci., Paris 197, 1184—1185 (1933).

Let $\varphi(z) = \sum_0^m \alpha_n z^n$, $\alpha_m = 1$, $\Theta = \sum_0^m |\alpha_n|$. Let $\varphi(z)$ have $k(>0)$ zeros with $|z| \geq r \geq 1$. Then for every integer $\lambda < k$ there are at least $(\lambda + 1)$ zeros in the annulus $(r, r \sqrt[\lambda]{\Theta})$. In particular, there cannot exist more than $(\nu - 1)$ zeros outside of $|z| = \sqrt[\nu]{\Theta}$.

E. Hille (New Haven, Conn.).

Brauer, Alfred: Bemerkungen zu einem Satze von Herrn G. Pólya. Jber. Deutsch. Math.-Verein. 43, 124—129 (1933).

Pólya hat folgenden Satz bewiesen [Jber. Deutsch. Math.-Verein. 28, 31—40 (1919)]: Es sei $n \geq 17$. Wenn das ganzzahlige Polynom $f(x)$ vom Grade n für n ganzzahlige Werte von x dieselbe Primzahl, positiv oder negativ genommen, annimmt, so ist $f(x)$ entweder irreduzibel oder das Produkt zweier irreduzibler Faktoren gleichen Grades. — Verf. gibt für diesen Satz einen neuen Beweis und zeigt, daß er bereits für $n > 6$, aber schon nicht mehr für $n = 6$ gilt. Aus dem Beweis ergibt sich weiterhin, daß im Falle der Reduzibilität von $f(x)$ die beiden Faktoren gleichen Grades eine konstante Summe oder Differenz haben müssen.

Wegner (Darmstadt).

Weitzenböck, R.: *Neuere Fortschritte in der Invariantentheorie*. Tôhoku Math. J. 38, 442—446 (1933).

Schiffer, Max: *Ein neuer Beweis des Endlichkeitssatzes für Orthogonalinvarianten*. Math. Z. 38, 315—322 (1934).

Nach Hilbert ist der Satz von der Invariantenendlichkeit bewiesen, sobald man einen linearen Operator kennt, der Invarianten reproduziert und aus beliebigen Funktionen Invarianten erzeugt. Nach Hurwitz liefert bei abgeschlossenen kontinuierlichen Gruppen die Integration über die Gruppenmannigfaltigkeit einen solchen Operator. Die Schwierigkeit, die dabei in der Bestimmung eines invarianten Volumenelementes liegt, wird hier umgangen durch Benutzung einer Parameterdarstellung der Drehungsgruppe mittels überzähligen Parametern. Ist τ eine beliebige Matrix, so ist $\sigma(\tau) = (\tau\tau')^{-\frac{1}{2}} \cdot \tau$ eine orthogonale Matrix, wobei $(\tau\tau')^{-\frac{1}{2}}$ die bekannte von Sylvester eingeführte Quadratwurzel ist. Ist nun $a \rightarrow a^\sigma$ die von der Matrix σ induzierte Transformation der Formenkoeffizienten a , so ist

$$O_1 f(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\|\tau\|} |\tau|^{2l} f(a^{\sigma(\tau)}) d\varrho;$$

$$\tau = (\xi_{ik}), \quad \|\tau\| = \sum \xi_{ik}^2, \quad d\varrho = d\xi_{11} d\xi_{12} \dots d\xi_{nn}$$

ein Operator mit den verlangten Eigenschaften, der übrigens bis auf einen konstanten Faktor mit dem Hurwitzschen übereinstimmt. van der Waerden (Leipzig).

Lindemann, F.: *Eine Verallgemeinerung des Umkehr- und des Teilungs-Problems der Abelschen Integrale nebst geometrischen Anwendungen*. Abh. bayer. Akad. Wiss., N. F. H. 19, 1—46 (1933).

Es sei eine Kurve $f(x, y) = 0$ vom Geschlecht p gegeben. Wir betrachten zunächst eine Nicht-Spezialschar von Punktgruppen auf ihr. Ihre Ordnung ist um p größer als ihre Dimension D . Wir können D Punkte beliebig wählen, dann sind die übrigen p Punkte x_i dadurch bestimmt. Die Berechnung geschieht auf algebraischem Wege. Ziehen

wir das Abelsche Theorem heran, so sehen wir, daß die p Summen $\sum_{i=1}^p \int_{\mu}^{x_i} du_h$ der Integrale erster Gattung durch die Schar gegeben sind. Die Bestimmung der p Punkte x_i stellt dann das Jakobische Umkehrproblem dar. Es wird gelöst mit Hilfe gewöhnlicher ϑ -Funktionen. — Verf. stellt sich nun folgendes Problem: Er wählt $D - \sum_{i=1}^r (q_i - 1)$

Punkte willkürlich und fragt nach den Punktgruppen der Schar, von denen jeweils q_1, q_2, \dots, q_r Punkte zusammenfallen. Dieses Problem ist algebraisch nicht mehr so leicht zu lösen. Mit Hilfe des Abelschen Theorems kann man die Frage wieder so formulieren: Es sind die p Summen $\sum_{i=1}^p q_i \int_{\mu}^{x_i} du_h = v_h$ gegeben, wo die du_h wieder die Differ-

entiale D -ter Gattung sind. Gesucht sind die oberen Grenzen x_i . Zur Lösung führt Verf. θ -Funktionen höherer Ordnung ein. Sie bilden ein lineares System von δ^p Dimensionen, in dem auch die δ -te Potenz der θ -Funktion 1. Ordnung vorkommt, wo δ die Ordnung ist. Die Ergebnisse lassen sich alle rein algebraisch formulieren. Es wird die Anzahl der als Berührungspunkte in Frage kommenden Punkte sowie eine algebraische Kurve angegeben, die sie ausschneidet. — Von besonderem Interesse ist der Fall, daß bei teilerfremden ganzzahligen q_i das System der v_h oder ein Vielfaches davon ein Periodensystem der Integrale 1. Gattung darstellt. Sind alle $q_i = 1$, so haben wir den bekannten Fall der Teilung. — Zum Schluß behandelt Verf. noch den Fall, daß die in Rede stehende Schar eine Spezialschar ist. Es ergeben sich eigentümliche Schwierigkeiten, die indessen die Ausbildung wesentlich neuer Methoden nicht notwendig machen. Eine Anwendung ist ein neuer Beweis des Brillischen Reziprozitätsgesetzes. Keller.

Hodge, W. V. D.: Abelian integrals attached to algebraic varieties. Math. Gaz. 17, 303—306 (1933).

Die Arbeit enthält einige allgemeine Betrachtungen über mehrdimensionale Abelsche Integrale, teils im Anschluß an eine frühere Arbeit des Verf. (vgl. dies. Zbl. 8, 22). Der Verf. will vor allem auf die großen Möglichkeiten und vielen ungelösten Probleme innerhalb der betrachteten Theorie aufmerksam machen. Ahlfors.

Reichardt, Hans: Arithmetische Theorie der kubischen Körper als Radikalkörper. Mh. Math. Phys. 40, 323—350 (1933).

Hasse hat die Arithmetik in kubischen Körpern mit klassenkörpertheoretischen Hilfsmitteln untersucht (Math. Z. 31). Das ist dadurch möglich, daß der zu einem kubischen Körper K gehörige Galoiskörper B ein zyklischer Körper über dem durch die Wurzel aus der Diskriminante erzeugten quadratischen Körper $Q = R(\sqrt{D})$ ist. Verf. stellt die gleichen Untersuchungen an, ohne von der Klassenkörpertheorie Gebrauch zu machen. Adjungiert man die 3. Einheitswurzel zu R , so wird $B_0 = B(\sqrt{-3})$ ein Kummerscher Körper über $Q_0 = R(\sqrt{D}, \sqrt{-3})$. Mit Hilfe der Theorie der Kummerschen Körper werden die Zerlegungsgesetze der rationalen Primzahlen in $Q_0, B_0, K_0 = K(\sqrt{-3})$ $K_1 = K(\sqrt{-3D})$, B und K untersucht, außerdem die zu den Primzahlen gehörigen Untergruppenreihen und die Struktur der auftretenden Relativdiskriminanten. Es wird ferner eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür angegeben, daß ein Körper $R(\sqrt{D}, \sqrt{-3})$ die Rolle des Körpers Q_0 für einen kubischen Körper spiele. Die Frage nach der Anzahl der kubischen Körper gegebener Diskriminante wird eingehend behandelt. Die Diskriminante eines kubischen Körpers ist von der Form $D = d f^2$, wobei d die Diskriminante von Q ist. $A(f)$ sei die Anzahl der verschiedenen Körper B_0 mit dem gleichen f . Es wird aufs Neue bewiesen, daß $A(f)$ beliebig groß werden kann. Außerdem wird der Zusammenhang von $A(f)$ und dem Rang der absoluten Klassengruppe von Q_1 bezüglich 3, sowie dem Rang der absoluten Klassengruppe nach E^* bezüglich 3 untersucht, wobei E^* die Gruppe aller zu 3 primen Hauptideale ist, die aus primären Körperzahlen entstehen. Durch Vergleich der Resultate des Verf. mit der von Hasse stammenden Relation $A(1) = \frac{3^r - 1}{2}$ (r der Rang der absoluten

Klassengruppe von $R(\sqrt{d})$ bezüglich 3) ergibt sich ein neuer Beweis für den von A. Scholz (dies. Zbl. 4, 51) gefundenen Zusammenhang zwischen der absoluten Klassenzahl von $R(\sqrt{d})$ und $R(\sqrt{-3d})$. Außerdem wird ein Mittel zur Bestimmung aller quadratischen Zahlkörper mit durch 3 teilbarer Klassenzahl hergeleitet.

Taussky (Wien).

Scholz, Arnold: Die Kreisklassenkörper von Primzahlpotenzgrad und die Konstruktion von Körpern mit vorgegebener zweistufiger Gruppe. I. Math. Ann. 109, 161 bis 190 (1933).

Verf. hat früher (Math. Z. 30 und S.-B. Heidelberg. Akad. Wiss. 1929) bewiesen, daß man sich beim Nachweis der Existenz von Körpern mit beliebiger zweistufiger Gruppe darauf beschränken kann, die Existenz von sogenannten „Dispositionskörpern“ und von Körpern mit beliebiger zweistufiger Gruppe von Primzahlpotenzordnung zu beweisen. Da die Existenz von Dispositionskörpern bewiesen ist, ist das Problem auf die Frage nach Körpern mit zweistufiger Gruppe von Primzahlpotenzordnung zurückgeführt. Verf. gibt nun eine Konstruktion der zweistufigen Körper von Primzahlpotenzgrad an, deren Gruppe sich aus 2 Elementen von Primzahlordnung erzeugen läßt, und erwähnt, daß ihm inzwischen die Konstruktion von Körpern mit beliebiger zweistufiger Gruppe aus 2 Erzeugenden gelungen ist. Jede zweistufige Gruppe von Primzahlpotenzordnung ist als Faktorgruppe in einer sogenannten „Zweiggruppe“ enthalten. Es genügt daher, die Existenz von Körpern mit Zweiggruppe zu beweisen. Eine zweistufige Gruppe \mathfrak{G} wird Zweiggruppe vom Typus $(l_1^{h_1}, \dots, l_n^{h_n}; l^k)$ genannt, wenn $(l_1^{h_1}, \dots, l_n^{h_n})$ der Typus der Faktorgruppe nach der Kommutatorgruppe \mathfrak{A} ist und für die Kommutatorgruppe die folgenden Bedingungen gelten: Die Repräsentanten S_1, \dots, S_n der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ lassen sich so wählen, daß $S_i^{h_i} = E$ ist; der Kommutator A_{ik} zweier Elemente S_i und S_k hat die Ordnung l^k , und zwischen den Elementen von

\mathfrak{A} bestehen nur die folgenden zwangsläufigen unabhängigen Relationen: $A_{ik}^{s_i-1} A_{kj}^{s_j-1} A_{ji}^{s_i-1} = E$ und $A_i = E$ ($A^s = S^{-1}AS$, $f_i = 1 + S_i + \dots + S_i^{h_i-1}$). Der maximale abelsche Unterkörper K_0 des Zweigkörpers K , dessen Gruppe den Typus $(l_1^{h_1}, \dots, l_n^{h_n})$ hat, läßt sich durch ein Produkt $K_{p_1}^{h_1}, \dots, K_{p_n}^{h_n}$ darstellen, wobei $K_{p_i}^{h_i}$ den Unterkörper h_i -ten Grades des Körpers der p_i -ten Einheitswurzeln bedeutet. Die p_i sind dabei verschiedene Primzahlen $\equiv 1 \pmod l$ oder ein $p_i = l^{h_i+1}$. Die Gruppe von K_0 sei $\{S_1, \dots, S_n\}$, $S_i^{h_i} = E$. Die Galoisgruppe von K wird nach dem Tschebetarowschen Monodromiesatz aus den Trägheitssubstitutionen der Primideale von K erzeugt. Verf. richtet die Konstruktion gerade so ein, daß die S_i die Trägheitssubstitutionen werden. K ist ein abelscher Oberkörper von K_0 ; der absolute Klassenkörper von K_0 reicht aber im allgemeinen zur Konstruktion von K nicht aus, sondern es muß ein Führer hinzugenommen werden. Als Führer kommt eine rationale Zahl $q_1 \dots q_m$ in Betracht, wo die q Primzahlen $\equiv 1 \pmod l$ sind oder eines der q_i eine höhere Potenz von l ist. Die Klassenzahl von K_0 muß aber auf jeden Fall durch l teilbar sein, es muß sogar jeder Unterkörper $K_{p_1}^{h_1} K_{p_2}^{h_2}$ eine durch l teilbare Klassenzahl haben. Daraus folgt: Eine notwendige Bedingung dafür, daß sich K_0 zu einem Zweigkörper erweitern läßt, ist, daß die nicht durch l teilbaren p_i untereinander l -te Potenzreste sind. Ist ein $p = l$, so braucht l nicht l -ter Potenzrest der übrigen p zu sein, dagegen muß $p_i \equiv 1 \pmod{l^2}$ für alle übrigen p gelten. — Es wird ferner eine hinreichende Bedingung für den Typus $(l_1^{h_1}, l_2^{h_2}; l^k)$ angegeben und bewiesen, daß diese hinreichende Bedingung für den Typus $(l, l; l^k)$ aus $\left(\frac{p_1}{p_2 l} = \left(\frac{p_2}{p_1 l}\right) = 1\right)$ folgt, wenn außerdem der Primteiler von p_1 oder p_2 in K_0 in einer erzeugenden Idealklasse liegt. Die zuerst als notwendig genannte Bedingung ist daher in diesem Fall auch hinreichend. Da sich dieser Spezialfall durch geeignete Wahl von p_1 und p_2 erreichen läßt, ist dann damit die Existenz von Körpern mit zweistufiger Gruppe und 2 Erzeugenden von Primzahlordnung bewiesen. Für $n = 2$ genügt es, eine Primzahl q als Führer in K_0 zu nehmen. Der Strahlklassenkörper $\hat{K}_0 \pmod q$ hat daher in seiner Gruppe die symbolische Erzeugende $A_{12} = A$ und eine von q stammende Trägheitssubstitution T . Der gesuchte Zweigkörper K ist ein Unterkörper von \hat{K}_0 . Seine Gruppe ist eine Faktorgruppe der Gruppe von \hat{K}_0 und geht aus dieser durch eine Relation $T = A^F$ (F ein Polynom in S_1 und S_2) hervor. Die Struktur der Galoisgruppe eines solchen Körpers ist daher wieder durch die symbolische Ordnung \mathfrak{M} von A bestimmt. \mathfrak{M} muß so bestimmt werden, daß K ein Zweigkörper wird. Das gelingt immer unter der folgenden Bedingung: Ist r Norm eines Primideals \mathfrak{r} der erzeugenden absoluten Idealklasse A , dann gilt für alle Idealpotenzen ϱ, σ von \mathfrak{r} die Ungleichung:

$$r \nmid \varrho^{(s_1-1)(s_2-1)} \sigma^l.$$

Diese Ungleichung geht in eine Gleichung über, wenn man statt der Zahlen die Hauptideale betrachtet; sie wird die Hauptirrealität des Körpers genannt. Um die Hauptirrealität für die Körper $K_0 = K_{p_1}^{h_1} K_{p_2}^{h_2}$ mit $r = p_1$ zu beweisen, wird die Einheitengruppe von K_0 genau untersucht und gezeigt, wie die Einheiten von K_0 aus den Einheiten der Unterkörper von K_0 hervorgehen. Dabei werden die Ergebnisse einer früheren Arbeit des Verf. (S.-B. Heidelberg. Akad. Wiss. 1930) ergänzt. Für die in Betracht kommenden Körper K_0 wird die Einheitengruppe vollständig bestimmt. Taussky (Wien).

Hasse, Helmut: Explizite Konstruktion zyklischer Klassenkörper. Math. Ann. 109, 191—195 (1933).

Die Existenzbeweise der Klassenkörpertheorie liefern bisher kein Konstruktionsverfahren für den Klassenkörper zu einer gegebenen Idealgruppe. Verf. gibt eine Konstruktion für den Klassenkörper K zu einer Idealgruppe H mit zyklischer Klassen- gruppe von beliebiger Ordnung n an. Darauf läßt sich bekanntlich der allgemeine Fall ohne weiteres zurückführen. Es genügt außerdem, die Konstruktion nur für solche Grundkörper k durchzuführen, welche die n -ten Einheitswurzeln enthalten. Daß daraus die Existenz von Klassenkörpern über beliebigen Grundkörpern folgt, wurde bereits früher in konstruierender Weise bewiesen. Enthält k die n -ten Einheitswurzeln, so läßt sich K durch Adjunktion der n -ten Wurzel aus einer geeigneten Zahl α bilden. Ein solches α wird durch folgende Überlegung gewonnen: In α gehen nur die Primidealeiler des Führers \mathfrak{f} von H zu Exponenten $\equiv 0 \pmod{+n}$ auf. Ist a der Exponent, zu dem ein $p \mid \mathfrak{f}$ in α aufgeht, und η eine Basiszahl für die (zyklische) Gruppe der Primärzahlen in bezug auf die Gruppe der Hyperprimärzahlen, so läßt sich α auch dadurch charakterisieren, daß für das Hassesche Normenrestsymbol $\left(\frac{\eta, \alpha}{p}\right) = \left(\frac{\eta}{p}\right)^a$ gilt. Es

wird gezeigt, daß sich der Wert des Normenrestsymbols ohne Kenntnis der Zahl α berechnen läßt, wenn nur α insofern als normiert vorausgesetzt wird, als festgesetzt wird, der n -te Potenzcharakter $\left(\frac{\alpha}{b}\right) = \chi(b)$. Dabei bedeutet χ einen festen erzeugenden Charakter der Klassengruppe nach H , und b durchläuft die zu f primen Ideale von k .

Berechnet man dann umgekehrt das Normenrestsymbol $\left(\frac{\eta, \alpha}{p}\right)$ für alle Primideale $p \nmid f$, so muß es auf Grund des Existenzsatzes mindestens eine Normierung aller Exponenten $a \bmod +n$ geben, so daß $\prod p^a = \alpha_0$ ein Hauptideal ist. Dadurch ist α bereits bis auf eine Zahl q bestimmt, welche n -te Potenz eines Ideals ist. Um q und damit α bis auf die n -te Potenz einer Zahl aus k zu erhalten, wird so vorgegangen: K^* sei der Körper, der durch Adjunktion der n -ten Wurzeln aller n -ten Idealpotenzen aus k entsteht. q seien Primideale aus den Klassen nach der K^* zugeordneten Idealgruppe. κ sei jeweils eine Zahl von der Ordnungszahl 1 in q . Dann muß q so gewählt werden, daß die folgenden endlich vielen Bedingungen erfüllt sind: $\left(\frac{q}{q}\right)^{-1} = \left(\frac{\kappa, \alpha}{q}\right) \left(\frac{\alpha_0}{q}\right)$.

Taussky (Wien).

Ingham, A. E.: Mean-value theorems and the Riemann zeta-function. Quart. J. Math., Oxford Ser. 4, 278—290 (1933).

It is known that the Riemann zeta-function satisfies a mean-value theorem of the form

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt = C_k(\sigma)$$

for certain values of σ and positive integral values of k . The object of this paper is to extend these theorems to non-integral values of k . The main result is that the formula holds if $\sigma > \max\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{k}\right)$, k being any positive number. The idea underlying the proof is that a mean-value of this kind satisfies a convexity condition both as a function of σ and as a function of k .

E. C. Titchmarsh (Oxford).

Coleman, J. B.: The Jacobian algorithm for periodic continued fractions as defining a cubic irrationality. Amer. J. Math. 55, 585—592 (1933).

This paper is a continuation of a previous article by the author [ibid., 52, 835 (1930)] and deals with the irreducibility of the characteristic equation $q^3 - Mq^2 + Nq - 1 = 0$ for a periodic ternary continued fraction of period k , with partial quotients p_i, q_i — positive integers or zero. It is assumed here that $p_i \leq q_i, q_i \neq 0$ ($p_1 \neq 0$). By direct expansion, the irreducibility of the equation in question readily follows for $k = 1, 2, 3, 4$. The object of the present paper is to show that for $k \geq 5$, we have in general $M > |N|$ — a sufficient condition for irreducibility. In order to obtain the said inequality, the author derives certain properties of the continuants entering in the expressions of M and N (loc. cit.). The above considerations are illustrated by a numerical example, for $k = 6$.

J. Shohat (Philadelphia).

Skolem, Th.: Einige Sätze über gewisse Reihenentwicklungen und exponentiale Beziehungen mit Anwendung auf diophantische Gleichungen. Skr. norske Vid.-Akad., Oslo Nr 6, 1—61 (1933).

Es werden zwei Methoden entwickelt, um folgende Frage anzugreifen: „Gegeben Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ eines Zahlkörpers K n -ten Grades. Für welche ganzen rationalen x_1, x_2, \dots, x_m gehört $\alpha_1^{x_1} \alpha_2^{x_2} \dots \alpha_m^{x_m}$ einem gegebenen Modul vom Rang $< n$ in K , also etwa einem Unterkörper, an?“ Die Einheitentheorie führt auf dieses Problem z. B. das der Darstellungen von Zahlen durch zu K gehörige zerlegbare Formen in höchstens $n-1$ Veränderliche zurück. — In §1 wird gezeigt: „Seien α_{hk} ($h = 1, 2, \dots, m$) $m \cdot n$ reelle Zahlen $\neq 0$, so daß alle n -reihigen Determinanten

$$\left| \log \frac{\alpha_{i\mu}^\nu}{\alpha_{j\mu}^\nu} \right|_{\mu, \nu = 1, 2, \dots, n} \neq 0 \quad (1)$$

sind, wenn i_1, i_2, \dots, i_n irgend n verschiedene und j_1, j_2, \dots, j_n irgend n gleiche oder verschiedene der Indizes $1, 2, \dots, m$ sind, während $i_1 \neq j_1, i_2 \neq j_2, \dots, i_n \neq j_n$ ist. Sei ferner (a_{gh}) ($g = 1, 2, \dots, n$) eine rechteckige Matrix von $m \cdot n$ Elementen des Ranges n . Das Gleichungssystem $\sum_{h=1}^m a_{gh} \alpha_{h1}^{\alpha_1} \alpha_{h2}^{\alpha_2} \dots \alpha_{hn}^{\alpha_n} = 0$ ($g = 1, 2, \dots, n$)

hat dann höchstens endlichviele Lösungen in ganzen rationalen Zahlen x_1, x_2, \dots, x_n .“ Der Beweis nimmt o. B. d. A. an, daß eine unendliche Folge F von Lösungen x_1, x_2, \dots, x_n existiert, für die die Ausdrücke $X_h = \alpha_{h1}^{x_1} \alpha_{h2}^{x_2} \dots \alpha_{hn}^{x_n}$ ($h = 1, 2, \dots, m$) den Ungleichungen $X_1 \geq X_2 \geq \dots \geq X_m$ genügen. Wegen (1) muß dann für jedes Indexsystem $i_1, i_2, \dots, i_n, j_1, j_2, \dots, j_n$ wie oben mindestens einer der Limites $\lim X_{i\mu}/X_{j\mu}$ ($\mu = 1, 2, \dots, n$) Null sein, wenn F durchlaufen wird. Eine rekursive Schlußweise leitet hieraus einen Widerspruch her. — Als Anwendung wird durch Ausrechnung der Determinanten gezeigt, daß allein für $x = y = 0$ der Ausdruck $(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^x (2 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^y$ in $k(\sqrt{2})$ oder $k(\sqrt{3})$ liegt. Sind ferner α, β Zahlen eines zyklisch-kubischen Körpers mit den Konjugierten $\alpha', \beta', \alpha'', \beta''$

und ist $\log \left| \frac{\alpha'}{\alpha} \right| \log \left| \frac{\beta''}{\beta} \right| - \log \left| \frac{\alpha''}{\alpha} \right| \log \left| \frac{\beta'}{\beta} \right| \neq 0$, so ist $\alpha^x \beta^y$ allein für $x = y = 0$ eine rationale Zahl. — Die zweite Methode wird in § 2 zur Bestimmung aller ganzen rationalen Lösungen der Gleichungen $x^4 - 2y^4 = \pm 1$, $x^4 - 8y^4 = 1$, $x^4 - 5y^4 = 1$, in § 4 zum Nachweis, daß die ternäre Gleichung $x^5 + 2y^5 + 4z^5 - 10xy^3z + 10x^3yz^2 = \pm 1$ nur endlichviele ganze Lösungen hat, benutzt; allgemein dargestellt ist sie in § 3. Im wesentlichen handelt es sich um die Anwendung von Sätzen über die gemeinsamen Nullstellen eines Systems von analytischen Funktionen in einer oder mehreren p -adischen Veränderlichen; Verf. macht aber keinen Gebrauch von der Sprache der p -adischen Zahlen. Im einfachsten Fall einer

Veränderlichen betrachtet er eine Reihe $F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} p^i f_i(x)$, wo die $f_i(x)$ Polynome in x mit rationalen, in bezug auf p ganzen Koeffizienten sind, und fragt nach den ganzen rationalen Zahlen x , für die bei jedem r der r -te Abschnitt von $F(x)$ durch p^r teilbar wird; durch Kongruenzbetrachtungen ergibt sich, daß entweder nur endlichviele oder alle x dies leisten. Da $F(x)$ eine für jedes ganze p -adische x konvergente Potenzreihe hat, so ist dieses Ergebnis nichts als ein Spezialfall folgenden Satzes: „Eine Potenzreihe $F(x) \equiv 0$ mit p -adischen Koeffizienten in der p -adischen Veränderlichen x , die in einem Bereich $|x|_p \leq p^{-f}$ konvergiert, hat hier nur endlichviele Nullstellen.“ (Vgl. das funktionentheoretische Analogon.) Anwendungen: „Sei k der Körper der rationalen Zahlen, K ein Zahlkörper m -ten Grades, α eine Zahl aus K , von der keine Potenz α^x ($x \neq 0$ ganz rational) in einem Unterkörper von K liegt, M ein höchstens $(m-1)$ -gliedriger k -Modul in K . Dann liegen nur endlichviele Potenzen α^x in M .“ Gibt es nämlich eine natürliche ungerade Primzahl p mit $\alpha \equiv 1 \pmod{p}$, d. h.

$\alpha = 1 + p\beta$ (β ganz in bezug auf p), so ist $\alpha^x = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{x}{i} p^i \beta^i$, und unter Berücksichtigung

der Körperbasis kommt man gerade zu einer Gleichung $F(x) = 0$ der betrachteten Art. Der Fall $\alpha \equiv 1$ läßt sich ähnlich behandeln. — „Ist α ganz in K , e die kleinste natürliche Zahl mit $\alpha^e \equiv 1 \pmod{p}$, $\alpha^x = x_1 \omega_1 + x_2 \omega_2 + \dots + x_m \omega_m$ die Darstellung durch die Körperbasis und $F(x_1, \dots, x_m)$ ein Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten, so ist $F = 0$ nur für endlichviele x oder aber für alle x einer gewissen Restklasse mod e .“ — Daraus durch Spezialisieren: „Sei $(1, \vartheta, \bar{\vartheta})$ Basis eines kubischen Zahlkörpers negativer Diskriminante, $f(x, y, z)$ ein irreduzibles Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten, dessen höchster homogener Teil nicht durch Norm $(x + y\vartheta + z\bar{\vartheta})$ teilbar ist, h eine ganze rationale Zahl. Dann gibt es nur endlichviele ganze Zahlen x, y, z mit Norm $(x + y\vartheta + z\bar{\vartheta}) = h$, $f(x, y, z) = 0$.“ — „Sei die Binärform $F(x, y)$ mit rationalen Koeffizienten irreduzibel im Körper der rationalen Zahlen, aber reduzibel in einem kubischen Körper negativer Diskriminante. Dann gibt es nur endlichviele ganzerationale x, y mit $F(x, y) = h$.“ — Im Fall von Reihen zweier Veränderlichen zeigt Verf.: „Sind $f_1(x, y), g_1(x, y)$ Polynome in x, y mit rationalen, in bezug auf p ganzen Koeffizienten, sind ferner $f_0(x, y)$ und $g_0(x, y)$ prim zueinander mod p , so hat das Kongruenzsystem

$$\sum_{i=0}^v p^i f_i(x, y) \equiv 0 \pmod{p^{v+1}}, \quad \sum_{i=0}^v p^i g_i(x, y) \equiv 0 \pmod{p^{v+1}} \quad (v = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

nur endlichviele Lösungen in ganzen rationalen (allgemeiner ganzen p -adischen) Zahlen.“ Hieraus läßt sich ein weiterer Spezialfall des Thuesens Satzes herleiten: „Die Binärform 4. Grades $F(x, y)$ mit ganzen rationalen Koeffizienten sei irreduzibel im Körper der rationalen Zahlen, aber reduzibel in einem reell quadratischen

Körper; $F(x, 1) = 0$ habe zwei reelle und zwei komplexe Nullstellen. Dann hat $F(x, y) = h$ nur endlichviele ganze Lösungen.“ — Verf. vermutet, daß seine Methode sich auf alle unbestimmten Gleichungen anwenden lasse, „die auf Grund der Einheitentheorie einem System von exponentialen Beziehungen gleichbedeutend sind derart, daß die Zahl der Gleichungen \geq der Zahl der Exponenten ist“. Hierunter fiel z. B. jede Gleichung $F(x, y) = h$, wo F eine Binärform mit ganzen rationalen Koeffizienten ist, so daß $F(x, 1) = 0$ mindestens eine nichtreelle Wurzel hat; selbst der Ausnahmefall nur reeller Wurzeln scheint sich aber nach Andeutungen des Verf. durch Transformation auf den allgemeinen Fall behandeln zu lassen. Jedenfalls scheinen die neuen, in dieser Arbeit eingeführten Methoden viel für die Theorie der diophantischen Gleichungen zu versprechen; sie haben vor den Thueschen Methoden den Vorzug, zur wirklichen Bestimmung der Lösungen dienen zu können.

Mahler (Manchester).

Gruppentheorie.

Miller, G. A.: Groups involving a small number of squares. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 19, 1054—1057 (1933).

Miller, G. A.: Groups generated by two operators of orders 2 and 4 respectively whose commutator is of order 2. Tôhoku Math. J. 38, 1—6 (1933).

Wird eine Gruppe G erzeugt von 2 Elementen s und t , für die $s^2 = t^4 = (st^{-1}t^{-1})^2 = 1$ ist, so erzeugen die Elemente $(st)^2$ und $(ts)^2$ eine invariante kommutative Untergruppe H von G , wobei G/H die Diedergruppe der Ordnung 8 ist. Auf Grund dieser Tatsache werden die endlichen Faktorgruppen von G untersucht und ein Satz über direkte Produkte von Diedergruppen abgeleitet.

Magnus (Frankfurt a. M.).

Tazawa, Masatada: Über eine Eigenschaft der hyperkommutativen Gruppe. Proc. Imp. Acad. Jap. 9, 472—475 (1933).

Der Autor zeigt, daß die nach Remak [J. Math. 163, 34 (1930)] hyperkommutativ genannten Gruppen G alle und nur die Gruppen sind, die zu jedem Teiler d der Gruppenordnung g eine invariante Untergruppe der Ordnung d enthalten. Der Satz von Burnside [Theory of groups of finite order, 2. ed. 166 (1911)], daß die Gruppen G alle und nur die direkten Produkte von Gruppen von Primzahlpotenzordnung sind, wird neu abgeleitet.

Magnus (Frankfurt a. M.).

Taketa, Kiyosi: Über die Struktur der metabelschen p -Gruppen. Proc. Imp. Acad. Jap. 9, 480—481 (1933).

Es werden Gruppen \mathfrak{G} von Primzahlpotenzordnung p^m konstruiert, die einen maximalen abelschen Normalteiler \mathfrak{A} von vorgeschriebenem Typ besitzen, und für die $\Gamma = \mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ abelsch und von möglichst hoher Ordnung ist. Γ wird durch ganzzahlige Matrizen A dargestellt, in denen das Element in der i -ten Zeile und k -ten Spalte $\text{mod } p^{n_{ik}}$ zu nehmen ist (die n_{ik} hängen von \mathfrak{A} ab). Betrachtet man die $A \text{ mod } p$, so darf man annehmen, daß dann in der Hauptdiagonale Einsen, über derselben Nullen stehen. Gibt es in Γ ein $A = A_1$, das $\equiv (a_{ik}^0)$, $(\text{mod } p)$ mit $\Pi a_{i,i-1}^0 \not\equiv 0$, $(\text{mod } p)$ ist, so sind alle mit A_1 vertauschbaren Matrizen A von Primzahlpotenzordnung auch miteinander vertauschbar. Hieraus wird die Ordnung von Γ bestimmt. Die Ergebnisse werden ohne Beweise mitgeteilt.

Magnus (Frankfurt a. M.).

Suschkewitsch, Anton: Über die Matrizendarstellung der verallgemeinerten Gruppen. Commun. Soc. Math. Kharkow et Inst. Sci. math. Ukraine, IV. s. 6, 27—38 (1933).

Der Autor hat früher [Math. Ann. 99 (1928)] eine Untersuchung von verallgemeinerten bzw. von Rechts- und Linksgruppen endlicher Ordnung durchgeführt, d. h. von solchen „Gruppen“, in denen das Postulat von der Eindeutigkeit der Inversen nicht oder nur für die Rechts- bzw. Linksinverse erfüllt ist. Er zeigt nun, daß sich die Links- und Rechtsgruppen sowie gewisse früher betrachtete „Kerngruppen“ (die in jeder verallgemeinerten Gruppe enthalten sind) durch Matrizen n -ten Grades vom Range $m < n$ darstellen lassen, und er zeigt zugleich, daß und wie sich alle solchen Darstellungen aus den Darstellungen gewisser, die betreffenden verallgemeinerten Gruppen erzeugender (untereinander jeweils isomorpher) gewöhnlicher Gruppen durch

Matrizen vom Grade und Range m herstellen lassen. Als Hilfsmittel wird dabei die Links- und Rechtsmultiplikation der zuletzt genannten Darstellungen mit Matrizen von n und m bzw. m und n Zeilen und Spalten benutzt. *Magnus* (Frankfurt a. M.).

● **Eisenhart, Luther Pfahler: Continuous groups of transformations.** Princeton: Princeton univ. press a. London: Humphrey Milford 1933. IX, 301 S. geb. 18/-.

Die ersten drei Kapitel enthalten die klassische Liesche Gruppentheorie mit den Beweisen von F. Schur. Das vierte Kapitel behandelt die Cartan-Weylsche Theorie der adjungierten Gruppe und der halbeinfachen Gruppen (ohne Darstellungstheorie und ohne Klassifikation). Das fünfte Kapitel bringt den Zusammenhang mit der Theorie der Riemannschen Räume und der linearen Übertragungen nach Cartan und Schouten. Das sechste Kapitel bringt (im Anschluß an eine Arbeit von Eisenhart) die Liesche Theorie der Berührungstransformationen und der Funktionengruppen. *van der Waerden* (Leipzig).

Haar, Alfréd: Zur Theorie der kontinuierlichen Gruppen. Mat. természett. Értes. 49, 287—306 u. dtshc. Zusammenfassung 307 (1933) [Ungarisch].

Vgl. dies. Zbl. 6, 101.

Bauer, Edmond: Introduction à la théorie des groupes et à ses applications à la physique quantique. Sonderdruck aus: Ann. Inst. H. Poincaré, 170 S. (1933).

Das Buch will eine Einführung zu den größeren Werken über Gruppentheorie und Quantenmechanik von Weyl und Wigner sein. Inhalt: Vektorräume, Prinzipien der Quantenmechanik, Gruppentheorie, allgemeine Anwendungen, Drehungsgruppe. *van der Waerden* (Leipzig).

Mengenlehre und reelle Funktionen.

Sierpiński, W.: Un exemple effectif d'un ensemble dénombrable de nombres réels qui n'est pas effectivement énumérable. Fundam. Math. 21, 46—47 (1933).

Mazurkiewicz, Stefan: Sur les ensembles de capacité nulle et les ensembles H . Fundam. Math. 21, 59—65 (1933).

Enthält drei gleichartige Sätze über die Mengen von der Kapazität Null (transfiniten Nullmengen), die Mengen (H) und die Mengen (H_0). Der erste Satz besagt: Jede perfekte Menge enthält eine Menge der ersten Kategorie, dessen Komplementärmenge die Eigenschaft besitzt, daß jede geschlossene Teilmenge eine transfinite Nullmenge ist. *Ahlfors* (Helsingfors).

Piccard, Sophie: Sur une propriété des constituantes des ensembles analytiques. Fundam. Math. 21, 151—155 (1933).

Beweis des Satzes, daß die transfinite Folge von sog. Konstituanten irgendeiner analytischen (Souslinschen) Menge eine monotone, und zwar eine nicht abnehmende ist. *B. Knaster* (Warszawa).

Marchaud, A.: Sur les demi-sécantes et les semi-tangentes aux ensembles. J. Math. pures appl., IX. s. 12, 415—443 (1933).

(Vgl. dies. Zbl. 4, 21.) Die Menge E sei „in bezug auf die orientierte Ebene π abgeschlossen“, d. h., jede Folge von Punkten aus E , deren mit Vorzeichen versehenen Abstände von π monoton wachsen, möge mindestens einen Häufungspunkt besitzen. Ferner sei C ein offener, konvexer, auf der negativen Seite von π gelegener Halbkugel, und zu jedem Punkt von E mit Ausnahme höchstens der Punkte einer Untermenge B gebe es eine gerichtete Sehne, die einer Richtung aus C entgegengesetzt parallel ist; B' sei die Vereinigungsmenge aller zu C kongruenten und ähnlich gelegenen Kegel mit Spitzen in Punkten von B : dann zeigt eine ganz einfache Überlegung, daß E ganz in B' enthalten ist. — Dieses Lemma ergibt unmittelbar Aussagen über die Gestalt gewisser Mengen, z. B. Ebenheits- und Linearitätsbedingungen, sowie einige Sätze über Jordanbögen. Diese Sätze kann man analytisch interpretieren, indem man sie auf den Wertevorrat einseitig stetiger Funktionen anwendet. So ergibt sich: Es sei $f(x)$ eine in $a \leq x \leq b$ endliche, linksseitig-stetige Funktion, $g(x)$ in $a < x < b$ eine rechts- bzw. linksseitige Derivierte von $f(x)$; dann ist $g(x)$ für jedes x

mit Ausnahme höchstens abzählbar vieler Werte die Ableitung von $f(x)$; wenn $g(x)$ stetig schlechthin ist, so ist überall $g(x) = f'(x)$. Darin ist z. B. der Lebesguesche Satz, daß aus $g(x) \equiv 0$ auch $f(x) \equiv 0$ folgt, enthalten. — Endlich die Verallgemeinerung auf ein Differentialgleichungssystem $y' = F(x, y, z)$, $z' = G(x, y, z)$ mit den üblichen Regularitätsvoraussetzungen: Wenn der Vektor $(1, F, G)$ überall außer in höchstens endlich vielen Punkten einer Halbtangente eine Kurve ist, so ist diese eine Integralkurve.

Willy Feller (Kopenhagen).

Ridder, J.: Über approximativ stetige Denjoy-Integrale. Fundam. Math. **21**, 1—10 (1933).

The author discusses different generalizations of the Denjoy integral which lead to an approximately continuous, but non-necessarily continuous in the ordinary sense, indefinite integral. The definitions proposed by the author are respectively analogous to those of Denjoy-Khintchine-Lusin (constructive and descriptive definitions of an integral) and to that of Perron (the method of major and minor functions). Cf. the previous paper by the author, Math. Z. **37**, 161—169 (1933) (see also this Zbl. **7**, 58).

Saks (Warszawa).

Ridder, J.: Über das allgemeine Denjowsche Integral. Fundam. Math. **21**, 11—19 (1933).

There are given two necessary and sufficient conditions for a continuous function $F(x)$ to be an indefinite Denjoy integral: (A) $F(x)$ should be of generalized bounded variation and have the property (N_g^∞) ; (B) $F(x)$ should have both the properties (N_g^∞) and (T_2) and its approximate derivate should have a major function (in a suitably generalized sense) over the set of points at which this derivate exists. Further the following theorem is established: In order that a function $f(x)$ should be integrable in the Denjoy sense over (a, b) it is necessary and sufficient that for any $\varepsilon > 0$ the interval (a, b) might be represented as the sum of an enumerable set and a sequence $\{E_i\}$ of perfect sets subject to the condition: there exist two continuous functions $\psi(x)$ and $\varphi(x)$, of generalized bounded variation with the properties $(N_g^{-\infty})$ and $(N_g^{+\infty})$ respectively, such that $\psi(a) = \varphi(a) = 0$, $\psi(b) - \varphi(b) < \varepsilon$ and $\underline{D}_{E_i} \psi(x) \geq f(x) \geq \bar{D}_{E_i} \varphi(x)$ almost everywhere on any set E_i ($\underline{D}_E g(x)$ and $\bar{D}_E g(x)$ respectively denote the lower and upper derivatives of a function $g(x)$ with respect to a given set E). Here: $F(x)$ is said to be of generalized bounded variation in (a, b) if the interval (a, b) is the sum of an enumerable set and a sequence $\{E_i\}$ of perfect sets such that $F(x)$ is of bounded variation on every E_i . The property (T_2) (of Banach) for $F(x)$ means that the set of values any of which is taken on by $F(x)$ over a non-enumerable set of points is of measure zero; the property $(N_g^{+\infty})$ [$(N_g^{-\infty})$] that (a, b) is the sum of an enumerable set and of a sequence $\{E_i\}$ of perfect sets such that for any perfect set $E \subset E_i$ the set of values assumed by $F(x)$ at the points of E at which the derivate of $F(x)$ with respect to E exists and is $+\infty$ [$-\infty$] is of measure zero; finally, the property (N_g^∞) means that the function has both properties $(N_g^{+\infty})$ and $(N_g^{-\infty})$.

Saks (Warszawa).

Svenson, Erik: Beiträge zur Theorie gewisser Integraltypen. J. reine angew. Math. **170**, 179—196 (1933).

Sei $g(x)$ monoton wachsend und existiere das Hellingersche Integral $\int_0^x \frac{df^2}{dg} = h(x)$; es heißt umkehrbar, wenn auch $\int_0^x \frac{df^2}{dh} = g(x)$ ist; das ist dann und nur dann der Fall, wenn die Abbildung $g = g(x)$, $h = h(x)$ jede Nullmenge der h -Achse in eine Nullmenge der g -Achse überführt. Dieses bekannte Resultat wird verschiedentlich umgeformt; insbesondere: Setzt man $\frac{\Delta f^2}{\Delta g \Delta h} = \vartheta$, so ist für die Umkehrbarkeit des Integrales notwendig und hinreichend, daß fast überall auf der g -Achse gelte:

$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \vartheta = 1$. Sind $\int_0^x \frac{df_1^2}{dg} = h(x)$ und $\int_0^x \frac{df_2^2}{dg} = h_1(x)$ umkehrbar, und setzt man $\int_0^x \frac{df_1 df_2}{dg} = \varrho(x)$, $\frac{\Delta f_1 \Delta f_2}{\Delta g \Delta \varrho} = \bar{\vartheta}$, $\frac{\Delta \varrho^2}{\Delta h \Delta h_1} = \vartheta'$, so ist fast überall auf der g -Achse $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \bar{\vartheta} = 1$, $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \vartheta' = 1$. Es folgen Untersuchungen über „ineinandergeschachtelte“ Hellingersche Integrale, aus denen hervorgehoben sei: Ist $\Delta f^2 \leq \Delta g_1 \Delta g_2$ und existieren $\int_0^x \frac{df_1^2}{dg_1}$, $\int_0^x \frac{df_2^2}{dg_2}$, so existieren auch $\varrho_1(x) = \int_0^x \frac{df_1 df_2}{dg_1}$, $\varrho_2(x) = \int_0^x \frac{df_1 df_2}{dg_2}$, und es gilt: $\int_0^x \frac{df_1 d\varrho_2}{dg_1} = \int_0^x \frac{df_2 d\varrho_1}{dg_2}$; unter denselben Voraussetzungen gilt:

$$\int_0^x \frac{df_1 df_2 d\varrho_2}{dg_1 dg_2} = \int_0^x \frac{df_2 d \int_0^x \frac{df_1 df_2}{dg_1}}{dg_2}.$$

H. Hahn (Wien).

Wilkosz, W.: Die Darbousche Eigenschaft der Jacobischen Derivierten. Ann. Soc. Polon. math. 11, 28—34 (1933).

Wenn stetige Funktionen $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$ ($i = 1, \dots, n$) ein Gebiet D des n -dim. Euklid. Raumes R_n auf eine Punktmenge M in R_n abbilden, und wenn dabei eine den Punkt P enthaltende und zu D gehörende Kugel σ (Radius ϱ) auf σ' abgebildet wird, so wird der (existierend gedachte) Grenzwert: $\lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{|\sigma'|}{|\sigma|} = J(P)$ die sphärische nichtzentrierte Derivierte der Abbildung in P genannt; hierbei ist $|A|$ das äußere Lebesguesche Maß der Menge A . Es läßt sich zeigen: Existiert $J(P)$ in jedem Punkte von D , hat sie nur endliche Werte und ist die Abbildung umkehrbar eindeutig, so nimmt $J(P)$ jeden Wert an, der zwischen je zwei willkürlichen ihrer Werte liegt. Für sphärische zentrierte Derivierte trifft diese Eigenschaft unter gleichartigen Voraussetzungen jedoch nicht mehr zu.

J. Ridder (Groningen).

Spilrajn, Edward: Sur certains invariants de l'opération (A). Fundam. Math. 21, 229—235 (1933).

L'auteur généralise les théorèmes connus exprimant que, si l'on applique l'opération (A) aux ensembles mesurables resp. satisfaisant à la condition de Baire, on obtient de même un ensemble mesurable resp. satisfaisant à la condition de Baire. De plus, il généralise un théorème de Sélimanowski concernant les constituants, introduits dans la théorie des systèmes déterminants de l'opération (A). Nikodym.

Kuratowski, C.: Sur le prolongement de l'homéomorphie. C. R. Acad. Sci., Paris 197, 1090—1091 (1933).

Eine eindeutige Abbildung (Funktion) $y = f(x)$ α -ter Klasse, deren Umkehrung $x = g(y)$ von β -ter Klasse ist, heißt eine Homöomorphie der Klasse α, β . In Verallgemeinerung eines Satzes von Lavrentieff wird bewiesen: Eine Homöomorphie der Klasse α, β zwischen zwei beliebigen Mengen kann erweitert werden auf ein Paar von Mengen, deren erste von der (multiplikativen) Klasse $\alpha + \beta + 1$, deren zweite von der Klasse $\beta + \alpha + 1$ ist. Ferner: Ist A eine Menge der Klasse $\alpha (> 0)$ und $f(x)$ eine auf A definierte Homöomorphie der Klasse α, β , so ist $f(A)$ von der Klasse $\beta + \alpha$. Daraus folgt: Die Eigenschaft, eine Menge der multiplikativen Klasse $\alpha (> 0)$ zu sein, ist invariant gegenüber Homöomorphismen der Klasse $\alpha, 0$. — Ohne Beweis werden die Sätze angegeben: Zwischen zwei un abzählbaren Mengen A, B der Klassen $\alpha + 1 > 2$ und $\beta + 1 > 2$ gibt es immer eine Homöomorphie der Klasse β, α . Jede Menge der Klasse $\alpha + 1 > 1$ kann durch eine Homöomorphie der Klasse $\alpha, 0$ in eine abgeschlossene Menge des Raumes der irrationalen Zahlen übergeführt werden. Hans Hahn (Wien).

Wilkosz, W.: Complément au travail „Sur le théorème intégral de Cauchy“. Ann. Soc. Polon. math. **11**, 56—57 (1933).

L'auteur remarque qu'aux conditions du théorème fondamental de son travail cité (voir Zbl. **7**, 105) il faut ajouter la condition: $\frac{\partial p}{\partial x}$ et $\frac{\partial q}{\partial y}$ existent aussi dans R et sont finies. Voir aussi une remarque d'après Mlle Lawrence dans le livre: Théorie de l'intégrale (Varsovie 1933), 243 de M. Saks. J. Ridder (Groningen).

Denjoy, Arnaud: Sur l'intégration le long des ensembles fermés rectifiables. C. R. Acad. Sci., Paris **197**, 1576—1579 (1933).

Dans la première partie de cette note l'auteur considère trois classes d'ensembles fermés dans le plan; à savoir, les ensembles 1° qui ne contiennent, pour tout $k > 0$, qu'un nombre fini de continus disjoints et de diamètre plus grand que k (classe D-bis), 2° qui ne contiennent, pour tout $k > 0$, qu'un nombre fini de continus de diamètre $> k$ et ayant deux à deux une infinité au plus dénombrable de points communs (classe D-ter), 3° qui sont de mesure linéaire finie (classe Δ). Après une étude de la structure géométrique de ces ensembles l'auteur en donne quelques exemples très instructifs. — Dans la seconde partie l'auteur signale des généralisations importantes des théorèmes de la théorie des fonctions sur les intégrales curvilignes. Soit G un ensemble fermé de mesure linéaire finie et supposons que les régions (composantes) du complémentaire de G se divisent en deux groupes R_1, R_2, \dots et $\varrho_1, \varrho_2, \dots$ de façon que G est la frontière de $\sum R_n$. Soit $\{\Gamma_n''\}$ la suite des courbes simples fermées contenues dans les frontières des régions ϱ_n et parcourues dans le sens négatif par rapport à ces régions. Alors, pour toute fonction $f(z)$ holomorphe dans $\sum R_n$ et continue sur $G + \sum R_n$, on a $\sum \int_{\Gamma_n''} f(z) dz = 0$.

Des théorèmes analogues ont lieu pour les intégrales curvilignes $\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z) dz}{z-x}$ (généralisation de la formule de Cauchy-Painlevé), et $\int P dx + Q dy$ (généralisation de la formule de Cauchy-Green). Saks (Warszawa).

Sierpiński, W.: Remarques sur les fonctions de plusieurs variables réelles. Prace mat. fiz. **41**, 171—175 (1933).

In Anschluß an eine von L. Bieberbach in seiner (dies. Zbl. **2**, 187 referierten) Arbeit über das 13. Hilbertsche Problem ausgesprochene Vermutung, hat A. Lindenbaum u. a. bewiesen (s. dies. Zbl. **6**, 340), daß sich jede Funktion zweier (reeller) Veränderlichen in der Gestalt $F(x, y) = g[f_1(x) + f_2(y)]$ darstellen läßt, wo g, f_1 und f_2 Funktionen einer Veränderlichen sind. Dabei kann man von vornherein, für alle F , die Funktionen f_1 und f_2 fest wählen. Der Verf. bringt nun einen neuen einfachen Beweis des obigen Satzes und bemerkt, daß die festen f_1 und f_2 unter den Funktionen von der 1. Baireschen Klasse gewählt werden können, so daß dann die (von F abhängige) Funktion g stets eine meßbare ist. Der Beweis des Verf. reduziert sich auf den des folgenden Satzes: Damit es für eine feste Funktion $f(x, y)$ zu jeder Funktion $F(x, y)$ eine Funktion $g(x)$ gäbe, derart, daß $F(x, y) = g[f(x, y)]$ gelte, ist es notwendig und hinreichend, daß die Funktion $f(x, y)$ eine eindeutige sei [d. h. daß aus $f(x', y') = f(x'', y'')$ zugleich $x' = x''$ und $y' = y''$ folgen]. Zum Schluß wird induktiv gezeigt, daß sich jede reelle Funktion von endlich vielen Veränderlichen auf (ineinandergeschobene) Funktionen zweier Veränderlichen zurückführen läßt. B. Knaster.

Analysis.

Jackson, Dunham: Certain problems of closest approximation. Bull. Amer. Math. Soc. **39**, 889—906 (1933).

Für verschiedene, durch Integralminima definierte Folgen von trigonometrischen und rationalen Polynomen $T_n(x)$ bzw. $P_n(x)$, die zu einer festen stetigen (im ersten Falle 2π -periodischen) Funktion $f(x)$ gehören, werden Abschätzungen von $|f - T_n|$

bzw. $|f - P_n|$ aufgestellt. Die benutzte elementare Methode beruht auf den Sätzen von S. Bernstein und Markoff sowie auf der Hölderschen Ungleichung. Als typische Resultate mögen die folgenden angeführt werden. Es sei $\varrho(x)$ summabel und oberhalb einer positiven Schranke gelegen, $m > 0$, und $T_n(x)$ bezeichne dasjenige trigonometrische Polynom n -ter Ordnung, das unter allen gleicher Ordnung

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varrho(x) |f(x) - T_n(x)|^m dx$$

zu Minimum macht. Bedeutet ε_n die beste Approximation von $f(x)$ durch trigonometrische Polynome n -ter Ordnung (im Tschebyscheffschen Sinne), so gilt

$$|f(x) - T_n(x)| < C n^{\frac{1}{m}} \varepsilon_n$$

(C ist unabhängig von x und n). Ist nur $\varrho(x) \geq 0$ bekannt, aber mit ϱ auch ϱ^{-r} summabel, $r > 0$, so ist der Exponent $\frac{1}{m}$ durch $\frac{r+1}{mr}$ zu ersetzen. Entsprechendes gilt für die Polynomaufgabe, wobei die Exponenten von n bzw. $\frac{2}{m}$ und $\frac{2(r+1)}{mr}$ sind.

Szegő (Königsberg, Pr.).

Ketchum, P. W.: Expansions of two arbitrary analytic functions in series of rational functions. Bull. Amer. Math. Soc. **39**, 347 (1933).

Walsh, J. L.: A duality in interpolation to analytic functions by rational functions. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **19**, 1049—1053 (1933).

Verf. zählt in dualer Gegenüberstellung vier Theorempaare auf, die teils frühere Ergebnisse von ihm darstellen, teils von Ketchum herrühren, teils neu sind. [Trans. Amer. Math. Soc. **34**, 22, 65 (1932); dies. Zbl. **4**, 57; Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **19**, 203 (1933); dies. Zbl. **6**, 160; Bull. Amer. Math. Soc. **39**, 347 (1933), vorst. Titel.] Sie sind Spezialfälle des folgenden allgemeineren Satzes: Es existiere in einem Bereiche D gleichmäßig

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{\mu=0}^n |z - \beta_{\mu n}|^{\frac{1}{n}} \prod_{\nu=1}^n |z - \alpha_{\nu n}|^{-\frac{1}{n}} = \varphi(z) \neq 0, \quad \beta_{\mu n} \neq \alpha_{\nu n}.$$

Ferner seien $C_1: \varphi(z) = R_1$ und $C_2: \varphi(z) = R_2 > R_1$ zwei Systeme von endlich vielen Kurven in D . Sie mögen gewisse endliche Systeme von abgeschlossenen Bereichen D_1, D_2 von folgender Art begrenzen: D_2 enthält D_1 , alle $\beta_{\mu n}$ und kein $\alpha_{\nu n}$. Außerdem sei $f(z)$ in D_2 regulär. Bezeichnet $p_n(z)$ das in den Punkten $\beta_{\mu n}$ die Funktion $f(z)$ interpolierende Polynom n -ten Grades, so konvergiert die Folge

$$p_n(z) \prod_{\nu=1}^n (z - \alpha_{\nu n})^{-1}$$

gleichmäßig in D_1 gegen die Funktion $f(z)$.

Szegő (Königsberg).

Walsh, J. L.: On approximation to an analytic function by rational functions of best approximation. Math. Z. **38**, 163—176 (1934).

Einer im abgeschlossenen, von der Jordankurve C begrenzten Bereich stetigen, im Innern von C regulären Funktion $f(z)$ kann eine Tafel von rationalen Funktionen

$$\{R_{mn}(z)\} \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots)$$

zugeordnet werden, derart, daß R_{mn} unter allen rationalen Funktionen, deren Zähler den Grad m , deren Nenner ferner den Grad n hat und $\neq 0$ ist, die beste Tschebyscheff-Approximation von f auf C liefert. Die Funktionen R_{mn} existieren stets, sie brauchen aber — wie an einem Beispiel gezeigt wird — nicht eindeutig bestimmt zu sein. Hat f im Innern von C genau ν Nullstellen, $\nu \geq 0$, so konvergiert eine beliebige unendliche Teilfolge von verschiedenen R_{mn} mit $m \geq \nu$ gegen f , und zwar gleichmäßig innerhalb C . Für $\nu = \infty$ gilt das gleiche, wenn in der betrachteten Folge $m \rightarrow \infty$. Weiter wird unter der Voraussetzung, daß f in einem C enthaltenden Bereiche regulär ist, die Stärke der Approximation untersucht. Ist $f \neq 0$, so kann für die Teilfolge $|f - R_{0n}|$ eine

entsprechende Abschätzung angegeben werden, wie sie für die Teilfolge $|f - R_{m0}|$ bekannt ist [vgl. Faber, J. f. Math. **150**, 79—106 (1920)]. Schließlich werden einige interessante Fragen bez. der Folge R_{mn} aufgeworfen. Szegő (Königsberg, Pr.).

Löwner, Karl: Über monotone Matrixfunktionen. Math. Z. **38**, 177—216 (1934).

Verf. stellt sich die interessante Aufgabe, folgende Verallgemeinerung der gewöhnlichen monotonen Funktionen durch Differenzen- bzw. Differentialungleichungen zu charakterisieren: $\chi(\omega)$ heiße monoton wachsend von der n -ten Stufe, wenn aus $A_n \leq B_n$, wobei A_n, B_n zwei reelle quadratische Formen von n Veränderlichen bezeichnen, stets $\chi(A_n) \leq \chi(B_n)$ folgt. Hierbei ist $\chi(A_n)$ diejenige Form, deren Eigenwerte aus denen von A_n (unter Beibehaltung der Eigenvektoren) durch Übergang von λ zu $f(\lambda)$ entstehen. Für die Monotonie n -ter Stufe ist notwendig und hinreichend, daß für jedes m aus der Reihe $1, 2, \dots, n$ die Determinantenungleichungen

$$[A(\eta_\nu, \xi_\lambda)]_1^m \geq 0, \quad A(\eta, \xi) = \frac{\chi(\eta) - \chi(\xi)}{\eta - \xi}$$

gelten, wobei ξ_λ, η_ν , abgesehen von der Bedingung $\xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \dots < \eta_m$, beliebig sind. Dieses Kriterium steht in enger Beziehung zum Cauchyschen Interpolationsproblem: Bestimmung einer rationalen Funktion vom Grade $< n$, welche an vorgeschriebenen Stellen ξ_ν, η_ν vorgeschriebene Werte φ_ν, ψ_ν annimmt ($\nu = 1, 2, \dots, n$). Es wird gezeigt, daß unter gewissen einfachen Vorzeichenvoraussetzungen über die Minoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} \psi_\nu - \varphi_\lambda \\ \eta_\nu - \xi_\lambda \end{pmatrix}_1^n$$

diese Aufgabe genau eine Lösung mit lauter reellen und einfachen Polen und mit negativen Residuen hat. (Derartige Funktionen sind bekanntlich die einzigen unter den reellen rationalen, welche für $\Im \omega > 0$ einen nichtnegativen Imaginärteil besitzen. Sie sind von beliebig hoher Stufe monoton, vgl. unten.) — Weiter ergibt sich, daß eine monotone Funktion n -ter Stufe für $n \geq 2$ im Innern ihres Definitionsintervalles mindestens $(2n - 3)$ -mal stetig differenzierbar ist und auf jeder beschränkten und abgeschlossenen Menge von inneren Punkten dieses Intervalles einen beschränkten $(2n - 2)$ -ten Differenzenquotienten besitzt. Schließlich wird die Frage erörtert, wann eine Funktion in $\langle \alpha, \beta \rangle$ von beliebig hoher Stufe monoton ist. Die Antwort lautet: Die fraglichen Funktionen sind analytisch, und zwar stimmen sie, ins Komplex fortgesetzt, mit der von Pick untersuchten Gesamtheit von Funktionen überein, welche mit Ausnahme der beiden Strecken $\omega \leq \alpha, \omega \geq \beta$ regulär sind und für $\Im \omega > 0$ einen nichtnegativen Imaginärteil haben. Die Picksche Charakterisierung dieser Funktionen [Math. Ann. **77**, 7—23 (1915)] geschieht durch Ungleichheitsbedingungen, welche den obenerwähnten für monotone Funktionen gänzlich analog sind. Die begriffliche Deutung dieser Ungleichungen hat die vorliegende Untersuchung veranlaßt.

Szegő (Königsberg, Pr.).

Banerjee, D. P.: On orthogonality of Legendre's function of the second kind and a method to expand a function in a series of Legendre's function of the second kind. Indian Phys.-Math. J. **4**, 9—19 (1933).

$Q_n(z)$ being the Legendre function of the second kind, the following orthogonality relations are proved:

$$\int_{-1}^{+1} Q_m(z) Q_n(z) dz = 0, \quad m, n \text{ integers}, \quad m - n \equiv 1 \pmod{2},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q_m(z) Q_n(z) dz = 0, \quad R(m+n) > -1, \quad m \neq n.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q_{p-\frac{1}{2}}(z) Q_{q-\frac{1}{2}}(z) dz = 0, \quad p, q \text{ integers}, > 0, \quad p \neq q.$$

Using these results formulae are given for the coefficients a_i in the expansion $f(z) = \sum a_i Q_i(z)$, the convergency of which is tested. (On p. 10 two times "2" is printed for "z".) *O. Bottema* (Sappemeer, Holland).

Banerjee, D. P.: On a method of expanding a given function in a series of Legendre's function of the first kind with unrestricted degree and argument. *Indian Phys.-Math. J.* **4**, 29—36 (1933).

For the function

$D_n^m(z) = C_1 P_n(z) + z[C_2 P_{n+1}(z) + C_3 P_{n-1}(z)] + (1-z^2)[C_4 P'_{n+1}(z) + C_5 P'_{n-1}(z)]$, where $P_n(z)$ is the Legendre function of the first kind and C_i are well-defined numbers, depending on n and m , the following relations are proved:

$$\int_{-1}^{+1} P_m(z) D_n^m(z) dz = \begin{cases} 0 & [n \neq m, \quad R(m) > 1, \quad R(n) > 1] \\ -\frac{4}{\pi} \sin \pi n \cdot (2n+1) & [n = m]. \end{cases}$$

Using this orthogonality theorem the coefficients a_i can be found of the expansion $f(z) = a_0 P_n(z) + a_1 P_{n+1}(z) + \dots$, where n is unrestricted. Discussion of the convergency. *O. Bottema* (Sappemeer, Holland).

Bailey, W. N.: A reducible case of the fourth type of Appell's hypergeometric functions of two variables. *Quart. J. Math., Oxford Ser.* **4**, 305—308 (1933).

Verf. hat bemerkt, daß die verallgemeinerte hypergeometrische Funktion vom Typus 4

$$F_4(\alpha, \beta; \gamma, \gamma'; x, y) = \sum_{m, n=0, 1, 2, \dots} \frac{(\alpha)_{m+n} (\beta)_{m+n}}{(\gamma)_m (\gamma')_n m! n!} x^m y^n, \quad (\alpha)_n = \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)$$

sich für $\gamma + \gamma' = \alpha + \beta + 1$ als das Produkt von zwei gewöhnlichen hypergeometrischen Funktionen darstellen läßt. Es gilt genauer unter dieser Bedingung

$$F_4 = F(\alpha, \beta; \gamma; z) F(\alpha, \beta; \gamma'; Z), \quad x = z(1-Z), \quad y = Z(1-z).$$

Aus diesem interessanten Satz ergibt sich leicht eine kompliziertere Formel von Watson über F_4 [*Proc. Lond. Math. Soc.* II. s., **20**, 189—195 (1922)]. *Szegő* (Königsberg).

Davies, O. L.: On asymptotic formulae for the hypergeometric series. I. Hypergeometric series in which the fourth element, x , is unity. *Biometrika* **25**, 295—322 (1933).

The object of this paper is to find approximations for the sum of a finite number of terms of the hypergeometric series with unit argument. This is done by fitting to it a Pearson-type curve. Numerical and graphical results are given to illustrate the different formulae. The interest of the paper is mainly statistical. *W. N. Bailey*.

Doetsch, Gustav: Die in der Statistik seltener Ereignisse auftretenden Charlierschen Polynome und eine damit zusammenhängende Differentialdifferenzgleichung. *Math. Ann.* **109**, 257—266 (1933).

Aus der Poissonschen Verteilung $\Psi_0(x, t) = \frac{t^x}{x!} e^{-t}$ entstehen vermöge der Rekursionsformel

$$\Psi_n(x, t) = \Psi_{n-1}(x-1, t) - \Psi_n(x, t); \quad n \geq 1; \quad x \geq 1,$$

$$\Psi_n(0, t) = (-1)^n e^{-t}$$

die Charlierschen Polynome

$$p_n(x, t) = \Psi_n(x, t) / \Psi_0(x, t) = \sum_{\nu=0}^n (-1)^{n-\nu} \binom{n}{\nu} \nu! t^{-\nu} \binom{x}{\nu}.$$

Die Funktionen $\Psi_n(x, t)$ genügen der Differenzendifferentialgleichung

$$\Phi(x-1, t) - \Phi(x, t) = \Phi_t(x, t).$$

Der Verf. gewinnt für die $p_n(x, t)$ die Summenrelation

$$\sum_{x=0}^{\infty} p_\nu(x, t) p_n(x, t_0) \Psi_0(x, t) = \begin{cases} 0, & n = 0, \dots, \nu-1 \\ \frac{n!}{(n-\nu)!} \frac{(t-t_0)^{n-\nu}}{t_0^\nu}, & n = \nu, \nu+1, \dots, \end{cases}$$

die die Orthogonalitätsrelationen für $t \rightarrow t_0$ als Spezialfall enthält. Für $\nu = 0$ erhält man eine erzeugende Funktion:

$$\sum_{x=0}^{\infty} p_n(x, t_0) \frac{t^x}{x!} = e^t \left(\frac{t - t_0}{t} \right)^n.$$

Sodann löst der Verf. das folgende Randwertproblem: Eine Funktion zu bestimmen, die 1. für $x = x_0 + h, x_0 + 2h, \dots$ und $t > 0$ der Gleichung

$$\Phi(x - h, t) - \Phi(x, t) = h \Phi_t(x, t)$$

genügt; 2. für $x = x_0, t > 0$ mit einer gegebenen, in jedem endlichen Intervall $0 < t \leq t_0$ stetigen Funktion $\Psi(t)$ übereinstimmt, die bis zum Nullpunkt uneigentlich absolut integrierbar sein soll; 3. für $t \rightarrow +0$ an den Stellen $x_0 + h, x_0 + 2h, \dots$ gegebenen Werten $\Phi_0(x)$ zustrebt. — Sucht man Lösungen, die für $x = -1, -2, \dots, t > 0$ verschwinden, so ist notwendig $\Psi(t) = \Phi_0(0)e^{-t}$, und es ergeben sich als einzige Lösungen Funktionen der Form

$$\bar{\Phi}(x, t) = \frac{t^x}{x!} e^{-t} \sum_{\nu=0}^m \Phi_0(\nu) \nu! \binom{x}{\nu} t^{-\nu}$$

bei beliebigem $\Phi_0(\nu)$. Speziell für $\Phi_0(\nu) = (-1)^{n-\nu} \binom{n}{\nu}$ erhält man die Funktionen $\Psi_n(x, t)$. Lüneburg (Braunschweig).

Leja, F.: Sur une fonction limite liée aux polynômes de Lagrange et aux ensembles fermés. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 42–44 (1934).

Es sei E beschränkt und abgeschlossen in der komplexen Zahlenebene. Verf. stellt (ohne Beweis) einige Sätze auf, welche mit dem von Fekete [Math. Z. 17, 228 bis 249 (1923)] definierten transfiniten Durchmesser $\delta(E)$ von E zusammenhängen. Es sei $\omega(z)$ ein Polynom n -ten Grades, dessen Nullstellen $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ voneinander verschiedene Punkte von E sind; ferner sei z beliebig und

$$l_n(z) = \min_{(\zeta)} \max_{1 \leq \nu \leq n} \left| \frac{\omega(z)}{\omega'(\zeta_\nu)(z - \zeta_\nu)} \right|^{\frac{1}{n}}.$$

Dann gilt u. a.: Der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n(z) = l(z, E)$ existiert und ist im Falle $\delta(E) > 0$ überall endlich, im Falle $\delta(E) = 0$ überall außer E unendlich. — Soweit Ref. sieht, dürfte $l(z, E)$ leicht mit $\exp G$ identifizierbar sein, wobei G die geeignet normierte Greensche Funktion der den unendlich fernen Punkt enthaltenden Gebietskomponente Γ der Komplementärmenge von E bedeutet. Hierbei liegt z in Γ . Szegő (Königsberg).

Pankraz, Otomar: Sur la divergence de l'intégrale de Dirichlet. Acad. Tchèque Sci., Bull. int. 33, 37 (1932).

Dirichletsche Reihen, fastperiodische Funktionen:

● Bernstein, Vladimir: Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet. Avec une préface de Jacques Hadamard. (Collect. de monogr. sur la théorie des fonctions.) Paris: Gauthier-Villars 1933. XIV, 320 S.

Das Buch ist aus Vorlesungen entstanden, die der Verf. im Jahre 1931 am College de France gehalten hat. Es beschäftigt sich hauptsächlich mit den durch allgemeine Dirichletsche Reihen gegebenen Funktionen einer komplexen Variablen. Es ist dem Verf. gelungen, den gegenwärtigen Stand dieses wichtigen Gebietes in einheitlicher Weise darzustellen, manche in der Zeitschriftenliteratur zerstreut vorhandenen Ergebnisse zusammenzufassen, zu ergänzen und zu vereinfachen. — Die spezielle Theorie der gewöhnlichen Dirichletschen Reihen sowie die Theorie der fastperiodischen Funktionen werden nicht behandelt, hierfür wird auf andere Monographien verwiesen. Auch die Umkehrsätze Tauberscher Art (spezielle Konvergenz- und Summabilitätstheorie) fallen aus dem Rahmen des Buches heraus. Kapitel I bringt vorbereitende Sätze über Konvergenzgebiete der D. R. — Die Kapitel II und V–VII behandeln „Überkonvergenz“-Sätze und das analytische Verhalten der Funktion $f(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$ in Abhängigkeit von der Verteilung der Exponentenfolge λ_n . In Kapitel III wird das gegenseitige analytische Verhalten der beiden Funktionen $f(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$, $F(s) = \sum \varphi(\lambda_n) a_n e^{-\lambda_n s}$ untersucht, wobei die Funktion $\varphi(z)$ gewissen Bedingungen zu genügen hat. Kapitel IV bringt

Singularitätensätze in Abhängigkeit von den Koeffizienten. Kapitel VIII handelt über die Verallgemeinerung des Hadamardschen Kompositionssatzes. Kapitel IX gibt Anwendungen auf die allgemeine Theorie der analytischen Funktionen. Angeschlossen sind drei Noten; 1. über die Dichte monotoner Folgen positiver Zahlen, 2. über ganze Funktionen, 3. über die Laplace-Transformation. Das Buch wird dem Studium und der Forschung in diesem Problemkreis gute Dienste leisten. *Otto Szász* (Cambridge, Mass.).

Riesz, Marcel: Zum Eindeutigkeitssatz der fastperiodischen Funktionen. *Fysiogr. Sällsk. Lund Förh.* **3**, Nr. 10, 1—9 (1933).

Der Verf. vereinfacht den von Hammerstein (S.-B. preuß. Akad. Wiss. 1928, 17—20) herrührenden Beweis, indem er die Anwendung des Weylschen Apparats [Math. Ann. **97**, 338—356 (1927)] der unitären Matrizen vermeidet. Es gilt zu zeigen, daß die Fourierreihe $f(x) \sim \sum a_n e^{i\lambda_n x}$ einer nicht identisch verschwindenden fastperiodischen Funktion nicht identisch verschwindet. Es seien a_1, a_2, \dots, a_r die Koeffizienten mit dem größten absoluten Betrage $= |a_1|$. Der Ansatz von Hammerstein läuft (in der Ausdrucksweise der Reihenentwicklung) auf die Bestimmung einer Funktion $g(x) \sim \sum b_n e^{i\lambda_n x}$ hinaus, für welche der Ausdruck $\sum |a_n|^2 |b_n|^2 / \sum |b_n|^2$ zu einem Maximum wird; dieses Problem wird durch die Funktionen

$$g(x) = b_1 e^{i\lambda_1 x} + b_2 e^{i\lambda_2 x} + \dots + b_r e^{i\lambda_r x}$$

gelöst, aber der Beweis, daß die Lösungen von dieser Gestalt sind, fordert die Anwendung der unitären Matrizen. Der Verf. ändert nun den Ansatz so, daß nur ein einziges Exponentialglied $b_k e^{i\lambda_k x}$ herauskommt. Der Ansatz lautet (in Reihensprache): Es sind zwei Funktionen $g(x) \sim \sum b_n e^{i\lambda_n x}$ und $h(x) \sim \sum c_n e^{i\lambda_n x}$ so zu bestimmen, daß der Ausdruck $\sum |a_n|^2 |b_n|^2 |c_n|^2 / \sum |b_n|^2 \sum |c_n|^2$ zu einem Maximum wird. Die Lösung wird durch alle Paare $g(x) = b_k e^{i\lambda_k x}$, $h(x) = c_k e^{i\lambda_k x}$ ($k = 1, 2, \dots, r$) geliefert. *B. Jessen* (Princeton, N. J.).

Walther, Alwin: Algebraische Funktionen von fastperiodischen Funktionen. *Mh. Math. Phys.* **40**, 444—457 (1933).

D'après Bochner [Math. Ann. **96**, 140—141 (1927)] si la fonction continue $f(t)$ (t réel, $-\infty < t < +\infty$) est p. p., il en est de même de la fonction $F[f(t)]$ lorsque $F(z)$ est une fonction uniforme et uniformément continue dans un domaine fermé contenant les valeurs de $z = f(t)$. Dans ce travail l'auteur examine d'abord le cas où $F(z)$ n'est plus uniforme, puis il démontre le théorème suivant: Soit

$$w^n + f_{n-1}(t)w^{n-1} + \dots + f_0(t) = 0$$

une équation algébrique à coefficients p. p., si le module du discriminant de cette équation a une borne inférieure positive (pour $-\infty < t < +\infty$), alors une quelconque des fonctions $w(t)$ définies par cette équation est p. p. — De là une généralisation de résultats dus à Carlson [C. R. Acad. Sci., Paris 185, 397 (1925)] et un théorème d'Ostrowski [Math. Z. **37**, 98—133 (1933); ce Zbl. **6**, 294]. *J. Favard*.

Integralgleichungen, Funktionalanalysis und Verwandtes:

Gibrat, Robert: Sur un type assez général d'équations intégrales singulières. *C. R. Acad. Sci., Paris* **197**, 1571—1574 (1933).

En étudiant les résultats expérimentaux relatifs à la corrosion des canalisations métalliques souterraines, l'aut. a été conduit à des équations intégrales du type
$$\int_{-\infty}^{+\infty} j(t) K(t-x) dt = \varphi(x).$$
 Il remarque que les fonctions $f(x) = \exp(kx)$ sont des solutions des équations homogènes $f(x) = \lambda(k) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) K(t-x) dt$, pourvu que
$$\lambda(k) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{kt} K(t) dt = 1,$$
 ce qui implique que l'intégrale existe et n'est pas nulle. Pour certains noyaux K , les valeurs admissibles de k peuvent former un continu à deux dimensions. Les noyaux K visés principalement par l'aut. sont algébriques, et dès lors k doit être purement imaginaire. L'aut. est ainsi conduit à mettre la solution

cherchée j sous la forme $j(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \lambda(ik) g(k) dk$, ce qui le conduit à des formules dont il renvoie à plus tard les conditions de validité. Nombreuses erreurs typographiques.

Georges Giraud (Bonny-sur-Loire).

Soula: Sur les équations intégrales de première espèce à limites fixes. C. R. Acad. Sci., Paris 195, 1363—1365 (1932).

Man ordne jeder in $0 \leq x \leq a$ integrierbaren Funktion $f(x)$ die Zahlenfolge $c_n = f_n(a)$ zu. Dabei ist $f_1(x) = \int_0^x f(x) dx$, $f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(x) dx$. Die Theorie der Integralgleichung erster Art

$$f(x) = \int_0^b k(x, s) h(s) ds \quad (1)$$

wird nun vom Verf. folgendermaßen behandelt. Man setze $k_1(x, s) = \int_0^x k(x, s) dx$,

$\dots, k_n(x, s) = \int_0^x k_{n-1}(x, s) dx, \dots, D_n(s) = k_n(a, s)$. Dann ist (1) dem System

$$c_i = \int_0^b D_i(s) h(s) ds \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (2)$$

gleichwertig. Das Resultat lautet: Es gibt Zahlen $a_i^{(j)}$, die nur von $k(x, s)$, nicht aber von $f(x)$ abhängen, so daß die notwendige und hinreichende Bedingung der Lösbarkeit

von (1) in der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} [a_n^{(1)} c_1 + a_n^{(2)} c_2 + \dots + a_n^{(n)} c_n]^2$ besteht. —

Weiter beschäftigt sich der Verf. mit der Frage, wie die Zahlen $c_n = f_n(a)$ beschaffen sein müssen, wenn $f(x)$ von spezieller Natur ist, z. B. beschränkt oder quadratisch integrierbar.

Schauder (Lwów).

Dixon, A. C.: On the solving nuclei of integral equations whose nuclei are homogeneous and of degree -1 . Proc. London Math. Soc., II. s. 36, 369—390 (1933).

This paper continues the work on integral equations which has engaged the author's attention for a considerable number of years. With the notation of hypergeometric series, the function

$$\sigma(\beta) = \beta^{\alpha+\beta+\frac{1}{2}} F(\alpha, \beta; \gamma; 1 - \beta^2)$$

satisfies the two functional equations

$$e^{-i\pi\gamma} \sigma(\beta e^{i\pi}) - 2i\sigma(\beta) \cos\pi(\alpha + \beta - \gamma) - e^{i\pi\gamma} \sigma(\beta e^{-i\pi}) = 0,$$

$$\sigma(\beta e^{i\pi}) - 2i\sigma(\beta) \cos\pi(\alpha - \beta) - \sigma(\beta e^{-i\pi}) = 0,$$

one inside, and the other outside, the unit circle. The paper discusses functions with properties similar to those of $\sigma(\beta)$, particularly those with simple poles at assigned points, and the functions are used to obtain theoretical solutions of some integral equations. The main theorem, which is somewhat complicated, is used to obtain a solution of the integral equation

$$\varphi(v) + f(v) = \int_{-\infty}^{\infty} K'(u, v) \varphi(u) du.$$

A function $K(u, v)$ is constructed so that the pair K and K' are such that each is a solving nucleus for the other. Finally the solving function is obtained for an integral equation in which the nucleus is equal to two different rational algebraic fractions in the two intervals $(0, 1)$ and $(1, \infty)$. The fractions are homogeneous functions of degree -1 , and, with certain limitations, may be any functions whatever of this type. The author states that the main theorem has wider applications than those given in the present paper.

W. N. Bailey (Manchester).

Friedrichs, Kurt: Die Grenzümproke positiv definiter unendlicher Matrizen. Neuer Beweis des Satzes von Toeplitz. Math. Ann. 109, 254—256 (1933).

Der Toeplitzsche Beweis des fraglichen Satzes (Gött. Nachr. 1907, 101—109) beruht auf der Jacobischen Transformation. Der Verf. bemerkt, daß man an deren Stelle auch eine Maximumbetrachtung verwenden kann.

Wintner (Baltimore).

Differenzengleichungen:

Ghermanesco, M.: Sur l'équation fonctionnelle linéaire d'ordre p , à coefficients constants. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 19, 387—394 (1933).

The problem of solving the functional equation

$$A_0 \varphi(x) + A_1 \varphi(x + \omega_1) + \dots + A_p \varphi(x + \omega_p) = g(x), \quad (1)$$

when the solution is required to have continuous derivatives up to a sufficiently high order $n+1$ and to meet the initial conditions $\varphi^{(i)}(0) = \lambda_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$), is reduced to that of solving a certain Volterra integral equation. By means of a solution of (1) the more general functional equation

$$\varphi_0(x) F(x) + \varphi_1(x) F(x + \omega_1) + \dots + \varphi_p(x) F(x + \omega_p) = g(x), \quad (2)$$

where $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi_i(x) = A_i$, is solved by a method of successive approximations. When $g(x)$ is an integral function solutions of (1) are obtained in series of polynomials (a special class of Appell polynomials) associated with the first member of (1), and the properties of these polynomials are developed in some detail. *R. D. Carmichael.*

Ghermanesco, M.: Sur les équations aux différences finies. C. R. Acad. Sci., Paris 197, 805—808 (1933).

The difference equation $\varphi(x) - \lambda \varphi(x + \omega) = g(x)$ is investigated from the point of view of the dependence of its solutions on the parameter λ . By means of the Cauchy integral formula the equation is transformed into the integral equation

$$\varphi(x) - \frac{\lambda}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(s) ds}{s - x - \omega} = g(x);$$

and the latter serves as an aid in the solution of the former. The solution of the difference equation is not always meromorphic in λ . Five theorems are stated without proof, and an indication is given of their generalization to more comprehensive functional equations. If we use the notation

$$\mathcal{G} \varphi = \varphi(x) - \lambda \varphi(x + \omega), \quad \mathcal{G} \varphi = \mathcal{G} \left(\mathcal{G} \varphi \right),$$

then a typical theorem of the paper may be stated as follows: In order that a solution of the given difference equation shall be meromorphic in λ it is necessary and sufficient that the given function $g(x)$ shall be decomposable into a (finite or infinite) sum of functions $g_i(x)$ such that $\mathcal{G}^{k_i} g_i(x) = 0$. In this case the λ_i are the poles, having the k_i as orders of multiplicity. *R. D. Carmichael (Urbana).*

Funktionentheorie:

Cartwright, Mary L.: On analytic functions regular in the unit circle. Quart. J. Math., Oxford Ser. 4, 246—257 (1933).

L'auteur entreprend une étude complétant celle de Hardy et Littlewood sur les fonctions conjuguées (J. reine angew. Math. 167; ce Zbl. 3, 202) et donne ici une partie de ses résultats énoncés sans démonstration dans les C. R. du Congrès de Zurich (Band 2, 47). $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ est supposée holomorphe en $z = re^{i\theta}$ pour $r < 1$ et $v(0) = 0$. On a les th. suivants où $r < 1$ et où $K(\alpha)$ désigne une fonction de α qui n'est pas la même dans les diverses inégalités. I. Si $|u(r, \theta)| < A(1-r)^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, on a $|v(r, \theta)| < K(\alpha) A(1-r)^{-\alpha}$. II. Si $|u(r, \theta)| < A(1-r)^{-\alpha}$ et $u(0) \geq 0$, on a $|f(z)| < K(\alpha) A(1-r)^{-1}$ si $\alpha < 1$, $|f(z)| < K(\alpha) A(1-r)^{-\alpha}$ si $\alpha > 1$, $|f(z)| < K(1) A(1-r)^{-1} \left[\log \frac{1}{1-r} \right]^{-2}$ si $\alpha = 1$; — La méthode de démonstration s'apparente à celle employée par l'auteur dans son étude des directions de Borel des fonctions entières d'ordre fini. Elle utilise le th. de Borel-Carathéodory sur la partie réelle, une proposition sur le minimum du module des fonctions sans zéros et d'ordre fini dans un angle qui découle du th. de Lindelöf et Phragmén sur le comportement d'une telle fonction sur les diverses directions, et un th. de Carlman. *G. Valiron (Paris).*

Wolff, Julius: Sur l'intégrale d'une fonction holomorphe à partie réelle positive. C. R. Acad. Sci., Paris **196**, 1949—1950 (1933).

$f(z) = u(z) + iv(z)$ étant une fonction hol. de $z = x + iy$ dans le demi plan D , $x > 0$, dont la partie réelle $u(z)$ est positive et dont la dérivée angulaire à l'infini est nulle, l'a. considère l'intégrale

$$F(z) = \int_1^z f(t) dt = \varphi(z) + i\psi(z)$$

et prouve que: le quotient $\psi(z)/z^2$ tend vers 0 quand z tend vers l'infini d'une façon quelconque dans D . La démonst. utilise les résultats d'un travail antérieur (Bull. Soc. Math. France **60**; ce Zbl. **6**, 171) d'après lesquels $\psi(z)$ est borné dans toute bande $0 < x < A$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\psi(x+iy)}{a^2+y^2} \leq \frac{\pi u(x+a)}{a}.$$

G. Valiron (Paris).

Rauch: Sur les directions de divergence des fonctions entières. Bull. Soc. Math. France **61**, 246—252 (1933).

L'A. chiama direzione di divergenza (o convergenza) d'ordine λ di una trascendente intera $f(z)$ ogni direzione $\arg z = \theta$ per la quale l'integrale $\int_{r\lambda+1}^{\infty} \frac{\log |f(re^{i\theta})| dr}{r\lambda+1}$ diverge (o converge). Egli dimostra che i lati degli angoli riempiti da direzioni di divergenza d'ordine λ di una trascendente intera $f(z)$ sono delle direzioni di Borel d'ordine λ di $f(z)$. Più precisamente, detti $z_n(x, A)$ gli zeri di $f(z) - x$ appartenenti al settore A , la serie $\sum [z_n(x, A)]^{-\lambda}$ può essere convergente al massimo per un solo valore di x , ogni qualvolta il settore A contiene all'interno uno dei lati predetti. Questo teorema precisa un teorema anteriore del Valiron (questo Zbl. **2**, 402); la dimostrazione, basata sui soliti metodi in uso in questo genere di ricerche, non si presta ad una breve esposizione.

Vlad. Bernstein (Milano).

Levin, Victor: Ein Beitrag zum Koeffizientenproblem der schlichten Funktionen. Math. Z. **38**, 306—311 (1934).

Für die Koeffizienten der in $|z| < 1$ regulären, schlichten, normierten und k -fach symmetrischen Potenzreihen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu k+1}^{(k)} z^{\nu k+1}; \quad a_1^{(k)} = 1 \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

gewinnt Verf. Abschätzungen, welche die bisher behandelten Fälle $k = 1$ (Littlewood) sowie $k = 2$ [Littlewood-Paley, J. London Math. Soc. **7**, 167—169 (1932); dies. Zbl. **5**, 18] auf interessante Weise ergänzen. Er beweist mittels einer Ausgestaltung der Littlewood-Paleyschen Methode

$$|a_n^{(3)}| \leq A n^{-\frac{1}{3}}, \quad |a_n^{(4)}| \leq B n^{-\frac{1}{4}} \log n, \quad |a_n^{(k)}| \leq C n^{-\frac{1}{k}} \log^{\frac{1}{k}} n, \quad k \geq 5$$

(A, B sind Weltkonstanten, C hängt von k ab). Szegő (Königsberg, Pr.).

Grunsky, Helmut: Zwei Bemerkungen zur konformen Abbildung. Jber. Deutsch. Math.-Verein. **43**, 140—143 (1933).

In seiner Dissertation hat der Verf. bewiesen, daß für jede im Einheitskreise schlichte Funktion $s(z)$ mit der Normierung $s(0) = 0$, $s'(0) = 1$ die Ungleichung besteht:

$$\left| \log \frac{zs'(z)}{s(z)} \right| \leq \log \frac{1+|z|}{1-|z|},$$

falls der im Nullpunkt verschwindende Zweig des Logarithmus verwendet wird. Hieraus berechnet er die genaue Sternschraube der schlichten Funktionen zu

$$R_s = \Im g \frac{\pi}{4} = 0,65579'.$$

Die zweite Bemerkung bezieht sich auf das Integral $\Im(\mathfrak{B}) = \frac{1}{2\pi} \int \log r d\varphi$, erstreckt über den Rand des Bereiches \mathfrak{B} der $z = re^{i\varphi}$ -Ebene im positiven Sinne. Es wird der

Satz bewiesen: Wird der Einheitskreis durch eine reguläre (nicht notwendig schlichte) Funktion $w = \varphi(z)$ mit $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$ abgebildet, so gilt für die Projektion \mathfrak{B}' des Bildbereiches \mathfrak{B} auf die Ebene der w die Ungleichung $\mathfrak{L}(\mathfrak{B}') \geq 0$. Daß $\mathfrak{L}(\mathfrak{B}) \geq 0$ ist, hat der Verf. schon in seiner Dissertation (dies. Zbl. 5, 362) bewiesen. *Löwner*.

Grötzsch, Herbert: Verallgemeinerung eines Bieberbachschen Satzes. Jber. Deutsch. Math.-Verein. **43**, 143—145 (1933).

\mathfrak{R} sei ein ganz im Endlichen gelegener Bereich der z -Ebene, der $z = 0$ im Innern enthält. Unter \mathfrak{R} werde die Randkomponente von \mathfrak{B} verstanden, auf der bzw. außerhalb der $z = \infty$ liegt. Normal heiße eine konforme Abbildung $w = f(z)$ von \mathfrak{B} , falls der Bildbereich \mathfrak{B} ebenfalls im Endlichen liegt, \mathfrak{R} in die ebenso definierte Randkomponente \mathfrak{R} von \mathfrak{B} übergeführt wird und außerdem $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ ist. Es wird nun mit Zuhilfenahme eines vom Verf. früher (dies. Zbl. 6, 171) definierten Verschiebungssatzes bewiesen, daß der genaue Wertebereich von $f''(0)$ für die Klasse der normierten Abbildungen von \mathfrak{B} eine abgeschlossene Kreisscheibe ist. *Löwner* (Prag).

Hornich, Hans: Integrale erster Gattung auf speziellen transzendenten Riemannschen Flächen. Mh. Math. Phys. **40**, 241—282 (1933).

Es ist nicht unmittelbar klar, wie die Integrale erster Gattung auf einer transzendenten Riemannschen Fläche definiert werden sollen. Die Schwierigkeit besteht in einer passenden Annahme über das Verhalten in der Umgebung der kritischen Stellen. Der Verf. wählt eine Bedingung, die darauf ausgeht, daß die Strömung in der Nähe der kritischen Stellen beliebig schwach wird, und zeigt, daß ein Integral, welches dieser Bedingung genügt, durch ihre Perioden eindeutig bestimmt ist. — Die Fragestellung wird dann wesentlich spezialisiert, indem nur zweiblättrige Riemannsche Flächen betrachtet werden, deren unendlich viele Windungspunkte alle auf der reellen Achse liegen und keinen endlichen Häufungspunkt besitzen. Zunächst werden die Integrale auf der Fläche von $\sqrt{\cos \frac{\pi z}{2}}$ betrachtet, was zu sehr interessanten Rechnungen führt. Zum Schluß wird dann ein allgemeines Existenztheorem aufgestellt, das an gewisse Konvergenzbedingungen gebunden ist. *Ahljors* (Helsingfors).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:

Fréchet, Maurice: Solution continue la plus générale d'une équation fonctionnelle de la théorie des probabilités en chaîne. (Note complémentaire.) Bull. Soc. Math. France **61**, 182—185 (1933).

Für die Funktionalgleichung

$$P_{ik}(s, t) = \sum_{j=1}^r P_{ij}(s, u) P_{jk}(u, t) \quad (i, k = 1, 2, \dots, r; \quad s < u < t)$$

mit den Zusatzbedingungen $\sum_{k=1}^r P_{ik}(s, t) = 1$, $P_{ik}(s, s) = \delta_{ik}$, $P_{i,k}(s, t) \geq 0$ wird die allgemeinste in bezug auf s und t differentiiertbare Lösung aufgestellt. Die Grundlage bilden frühere Untersuchungen des Verf. (vgl. dies. Zbl. 6, 173) sowie einige Ergebnisse von Kolmogoroff. *A. Khintchine* (Moskau).

Fouillade, A.: Sur l'itération de certaines substitutions linéaires. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **19**, 415—436 (1933).

Verf. betrachtet die linearen Substitutionen $x_{1j} = \sum_i m_{ij}^j x_{0i}$ mit nichtnegativen Koeffizienten m_{ij}^j , welche noch der Bedingung $\sum_i m_{ij}^j = 1$ genügen, d. h. genau dieselben

Substitutionen, welche in der Theorie der Markoffschen Ketten in der Wahrscheinlichkeitsrechnung auftreten. In einer rein-analytischen Form erhält Verf. mehrere Resultate über die Iterationen von solchen Substitutionen, welche in der Wahrscheinlichkeitsrechnung schon bekannt sind [vgl. R. v. Mises, Wahrscheinlichkeitsrechnung 1931, 533—560; M. Fréchet, Compléments à la théorie des probabilités discontinues

„en chaîne“, Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 2, 131—164 (1933); vgl. dies. Zbl. 6, 67].

A. Kolmogoroff (Moskau).

Hill, L. S.: Probability functions and statistical parameters. Amer. Math. Monthly 40, 505—532 (1933).

The stated purpose of the paper is “to present a connected account of the modern theory of statistical distributions of sets of n continuous quantitative attributes.” On the first page it is stated that no attempt is made to deal with „foundations, but certain notions of the theory of sets of points in an n -dimensional Euclidean space are described“. It is not exactly clear that the notions thus described are effectively used in the main part of the paper which follows rather closely known methods of deriving statistical parameters and probability functions involved in the theory of correlation of n variable normally distributed.

H. L. Rietz (Iowa).

Lawther jr., H. P.: The extended probability theory for the continuous variable with particular application to the linear distribution. Ann. math. Statist. 4, 241—262 (1933).

Für die Verteilung einer Summe von n gegenseitig unabhängigen zufälligen Variablen, deren jede einem Verteilungsgesetz mit einer innerhalb eines endlichen Intervalls linear variierenden, sonst verschwindenden Wahrscheinlichkeitsdichte unterliegt, wird eine exakte Formel aufgestellt und an Spezialfällen erläutert. Khintchine.

Gebelein, Hans: Die Bedingungen, unter denen statistische Prozesse zu universellen Verteilungsgesetzen führen. (Ges. f. Angew. Math. u. Mech., Würzburg, Sitzg. v. 17. bis 22. IX. 1933.) Z. angew. Math. Mech. 13, 430—432 (1933).

In Analogie zu den v. Misesschen, auf einen diskreten Phasenraum und eine diskrete Folge von Zeitpunkten bezüglichen Untersuchungen über den zufälligen Verlauf physikalischer Vorgänge wird eine Reihe von Sätzen für den Fall eines kontinuierlichen Phasenraums und einer stetigen Zeit ohne Beweis angeführt. Es handelt sich hauptsächlich um Bedingungen für die Existenz einer von der Ausgangsverteilung unabhängigen Limesverteilung und noch spezieller dafür, daß diese Limesverteilung die Gleichverteilung sei. Die mathematische Grundlage bilden die bekannten von Kolmogoroff aufgestellten partiellen Differenzialgleichungen der stochastischen Prozesse.

A. Khintchine (Moskau).

Gumbel, E. J.: La distribution limite de la plus grande valeur parmi les plus petites. C. R. Acad. Sci., Paris 197, 1381—1382 (1933).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit [C. R. Acad. Sci., Paris 197, 1082 (1933); dies. Zbl. 8, 25], in der eine asymptotische Formel für die Verteilung w_m des kleinsten Wertes der m größten von N Beobachtungen abgeleitet wurde, wird in dieser Arbeit eine ganz analoge Formel für die Verteilung w_{N-m+1} des größten Wertes unter den m kleinsten von N Beobachtungen bestimmt.

Lüneburg (Braunschweig).

Gumbel, E. J.: L'espérance mathématique de la $m^{\text{ième}}$ valeur. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 33—35 (1934).

Unter dem m ten Wert von oben wird die kleinste der m größten Beobachtungen einer statistischen Variablen verstanden; entsprechende Bedeutung besitzt der m te Wert von unten. Der Verf. berechnet unter Benutzung der in früheren Arbeiten (vgl. dies. Zbl. 8, 25 und vorst. Ref.) abgeleiteten Formeln für die Verteilung $w(x)$ dieser Größen ihren Erwartungswert \bar{u} . Es ergibt sich

$$\bar{u}_m = \tilde{u}_m + \frac{m}{N w(\tilde{u}_m)} \left(\log m + \gamma - \sum_{v=1}^{m-1} \frac{1}{v} \right),$$

$$\bar{u}_{N-m+1} = \tilde{u}_{N-m+1} - \frac{m}{N w(\tilde{u}_{N-m+1})} \left(\log m + \gamma - \sum_{v=1}^{m-1} \frac{1}{v} \right).$$

Lüneburg (Braunschweig).

Jordan, C.: Inversione della formula di Bernoulli relativa al problema delle prove ripetute a più variabili. Giorn. Ist. Ital. Attuari 4, 505—513 (1933).

Nach Bernoulli ist die Wahrscheinlichkeit P , daß unter n Beobachtungen von $m-1$ unabhängigen zufälligen Ereignissen x_1, \dots, x_{m-1} das Ereignis x_i sich v_i mal ($i = 1, \dots, m$) einstelle, durch die Formel

$$P = \frac{n!}{v_1! \dots v_m!} p_1^{v_1} \dots p_m^{v_m}$$

gegeben, wobei p_i die Wahrscheinlichkeit von x_i ist. Auf Grund einer allgemeinen Überlegung erhält der Verf. für die Wahrscheinlichkeit ΔP , daß, falls die Ereignisse x_i jeweils v_i mal beobachtet wurden, die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses x_i zwischen $p_i - \frac{\Delta p_i}{2}$ und $p_i + \frac{1}{2} \Delta p_i$ gelegen sei (wobei a priori für p_i alle Werte zwischen 0 und 1 als gleich wahrscheinlich angenommen werden), die Formel

$$\Delta P = \frac{p_1^{v_1} \dots p_m^{v_m} \Delta p_1 \dots \Delta p_{m-1}}{\int_0^1 \dots \int_0^1 p_1^{v_1} \dots p_{m-1}^{v_{m-1}} (1 - p_1 - \dots - p_{m-1})^{v_m} dp_1 \dots dp_{m-1}}$$

oder nach Berechnung des Nenners:

$$\Delta P = \frac{(n+m-1)!}{v_1! \dots v_m!} p_1^{v_1} \dots p_m^{v_m} \Delta p_1 \dots \Delta p_{m-1}.$$

Unter der Voraussetzung, daß die Häufigkeiten $f_i = \frac{v_i}{n}$, $i = 1, \dots, m-1$, klein gegenüber $\frac{v_m}{n}$ seien, ergibt sich hieraus auf Grund der Resultate einer früheren Arbeit des Verf. (vgl. dies. Zbl. 7, 314) die asymptotische Formel

$$\Delta P = (n+m-1) \dots (n+1) \prod_{i=1}^{m-1} e^{-n p_i} \frac{(n p_i)^{v_i}}{v_i!} \Delta p_i.$$

Unter der Voraussetzung dagegen, daß die v_i sehr groß und das Quadrat der Differenz $p_i - f_i$ sehr klein gegen f_i sei, folgt durch Anwendung der Stirlingschen Formel

$$\Delta P = \frac{(n+m-1) \dots (n+1)}{\sqrt{(2\pi n)^{m-1} f_1 \dots f_m}} e^{-\frac{1}{2} \chi^2} \Delta p_1 \dots \Delta p_m$$

mit

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(v_i - n p_i)^2}{v_i}.$$

Aus dieser Formel läßt sich sodann die Wahrscheinlichkeit P bestimmen, daß für ein System p_1, \dots, p_m der Ausdruck $\chi^2 < \lambda^2$ sei. Man erhält

$$P = \int_0^{\frac{1}{2} \lambda^2} t^{\frac{m-3}{2}} e^{-t} dt \bigg/ \Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right).$$

Lüneburg (Braunschweig).

Bailey, V. A.: On the interaction between several species of hosts and parasites. Proc. Roy. Soc. London A 143, 75—88 (1933).

Bailey, V. A.: Non-continuous interaction between hosts and parasites. Proc. Cambridge Philos. Soc. 29, 487—491 (1933).

This basic mathematical investigation of the general problem of interaction between hosts of several species and parasites of several species presents the fundamental equations which serve to determine the population densities and the age distributions in these populations at any time. Under plausible assumptions here made in stating the problem, it is proved that a steady state is impossible when the number of parasite-species is less than the number of host-species. Under the further assumption that the probabilities of interaction are independent of the ages of the surviving individuals of

the host-species, simultaneous linear integro-differential equations for behavior near the steady state are obtained from which it is deduced that when only two species interact the steady state is unstable to a first approximation. Extensions to the theory of hyperparasites is indicated. The only previous detailed investigation of this problem is due to Volterra: "Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie", Paris 1931; this Zbl. 2, 42, which the author criticizes. — The second paper gives a complete solution for the behavior near the steady state in a special case of non-continuous interaction between one host-species and one parasite-species. Here the densities oscillate with increasing amplitude about the steady values. *Albert A. Bennett* (Providence).

Merrell, Margaret: On certain relationship between β_1 and β_2 for the point binomial. *Ann. math. Statist.* 4, 216—228 (1933).

The Pearson moment ratios β_1, β_2 , (involving the third and fourth moments respectively) are here studied for the binomial function, $(p + q)^n$, ($p + q = 1$), for p and n not necessarily confined to the traditional values, ($0 \leq p \leq 1$, n a positive integer). Their variation for (I) p constant, (II) n constant, (III) np constant, (IV) npq constant, are studied and graphs exhibited. References to earlier results of K. Pearson, Student, and Lucy Whitaker, are given. *Albert A. Bennett* (Providence).

Carter, W. H.: A practical experiment with frequencies and probabilities. *J. Inst. Actuar.* 64, 465—476 (1933).

Pearson, Karl: On a method of determining whether a sample of size n supposed to have been drawn from a parent population having a known probability integral has probably been drawn at random. *Biometrika* 25, 379—410 (1933).

Pearson, E. S., and S. S. Wilks: Methods of statistical analysis appropriate for k samples of two variables. *Biometrika* 25, 353—378 (1933).

Milicer-Gruzewska, H.: The precision of the weighted average. *Ann. math. Statist.* 4, 196—215 (1933).

The author extends the results of Bowley, "Precision of Measurement Attained in Sampling", Congress of Statistics, Rome, 1925, (Cambridge 1925), on samples from a normal universe of pairs (x_i, y_i) by eliminating the restrictive hypothesis as to absence of correlation between the variates. Four cases (a) when all parameters are unknown, (b) all but Y are unknown, (c) all but Y and σ_y are unknown, (d) a generalization of (a), are examined in turn, and explicit formulas for a posteriori probability in terms of the assumed calculated characteristics of the sample are obtained, assuming in each case that $S_x S_y (1 - R^2) \neq 0$, and with other appropriate stated hypotheses.

Albert A. Bennett (Providence).

Aitken, A. C.: On fitting polynomials to weighted data by least squares. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* 54, 1—11 (1933).

Aitken, A. C.: On fitting polynomials to data with weighted and correlated errors. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* 54, 12—16 (1933).

Die beiden Abhandlungen sind Fortsetzungen der in dies. Zbl. 6, 215 referierten Arbeit. Dieselbe war auf äquidistante, gleich gute und voneinander unabhängige Beobachtungen beschränkt. Hier wird nun die Methode der Ausgleichung mittels Orthogonalpolynomen auf nicht gleich gute (in der ersten Arbeit) und auf Beobachtungen, wo die Fehler miteinander korreliert sind (in der zweiten), erweitert. Beide Abhandlungen sind von numerischen Anwendungen begleitet. — *Betr. Literaturnachweis* siehe auch Stephan, dies. Zbl. 6, 124 und Isserlis, *Biometrika* 19, 87—93. *Burrau*.

Harzer †, Paul: Tabellen für alle statistischen Zwecke in Wissenschaft und Praxis, insbesondere zur Ableitung des Korrelations-Koeffizienten und seines mittleren Fehlers. *Abh. bayer. Akad. Wiss., N. F. H.* 21, 1—91 (1933).

P. Harzer hat in seinen Abhandlungen „über die Wahrscheinlichkeit voneinander abhängiger Fehler und über ihr Abhängigkeitsmaß“ in den *Astronomischen Nachrichten* 219, 232 und 234 eine Formel zur Messung der gegenseitigen Abhängigkeit

zweier Größen aufgestellt, die von der gebräuchlichen Formel für den Korrelationskoeffizienten abweicht. Da die Formeln für die Harzersche Maßzahl r und deren mittleren Fehler $m(r)$ sehr verwickelt sind, hat Harzer die vorliegenden Tabellen berechnet, die gestatten, aus dem aus den Beobachtungen unmittelbar errechneten Korrelationskoeffizienten s und der Anzahl N der Beobachtungspaare r und $m(r)$ zu bestimmen.

F. Baur (Frankfurt a. M.).

Fischer, Carl H.: On multiple and partial correlation coefficients of a certain sequence of sums. Ann. math. Statist. 4, 278—284 (1933).

Der Gedankengang der in dies. Zbl. 7, 72 referierten Abhandlung (und der am selben Ort referierten Abhandlung von Rietz) wird durch Untersuchung der Korrelationskoeffizienten der Summen fortgesetzt. Eine gewisse Unabhängigkeit dieser Größen von dem zugrunde liegenden Verteilungsgesetz geht hervor.

Carl Burrau (Kopenhagen).

Fréchet, Maurice: Sur le coefficient, dit de corrélation. C. R. Acad. Sci., Paris 197, 1268—1269 (1933).

Die übliche Definition des Korrelationskoeffizienten leidet bekanntlich an dem Mangel, daß sie in ungetrennter Weise zwei ganz verschiedene Eigenschaften einer zweidimensionalen Verteilung zu messen hat: einmal die Abweichung der Regressionslinien von geradliniger Gestalt und dann die Abweichung der Verteilung selbst von der Regressionslinie. Es wird vorgeschlagen, den üblichen Korrelationskoeffizienten in zwei Faktoren zu zerlegen, die beide zwischen -1 und $+1$ variieren und deren einer das bekannte Pearsonsche Korrelationsverhältnis darstellt und nur die Abweichung einer der zufälligen Variablen von der betreffenden Regressionslinie mißt, während der zweite im Gegenteil nur von der Form der Regressionslinie abhängt und gegen evtl. Abänderung der Streuung in bezug auf diese Regressionslinie unempfindlich ist. Die Zerlegung ist in den Variablen unsymmetrisch. Einige Folgerungen sollen anderwärts besprochen werden.

A. Khintchine (Moskau).

Mises, R. von: Zur Berechnung des effektiven Zinsfußes. Skand. Aktuarie Tidskr. 16, 229—231 (1933).

Vgl. Holme dies. Zbl. 5, 406.

Gumbel, E. J.: Die Verteilung der Gestorbenen um das Normalalter. Aktuár. Vědy 4, 65—96 (1933).

In Verallgemeinerung eines Gedankenganges von Lexis werden in der vorliegenden Arbeit Absterbeordnungen untersucht, welche sich für den vollen Bereich des Arguments (also nicht nur in der Umgebung des Normalalters ξ , $l''(\xi) = 0$) in der Form $l(x) = l(\xi) [1 - \Phi(h(x - \xi))]$ approximieren lassen ($\Phi(x)$ Gaußsches Fehlerintegral). Nach einer knappen Charakteristik der Methode von Bortkiewicz zur Bestimmung der Konstanten schlägt Gumbel vor, die Methode der Momente zur Konstantenermittlung heranzuziehen: Wird die Sterblichkeitsdichte mit $\vartheta(x)$ bezeichnet, so werden durch die Forderungen 1. $\int_0^\infty \vartheta(x) dx = 1$ (Anfangsbedingung), 2. $\int_0^\infty l(x) dx = T(0)$ (Konstanz der Lebenserwartung des Neugeborenen $T(0)$), 3. $\bar{x} T(0) = \int_0^\infty T(z) dz$

(Konstanz des mittleren Alters der Lebenden \bar{x}) die Unbekannten $\xi, h, l(\xi)$ festgelegt. Da in den entsprechenden Gleichungen der Beobachtung zugängliche Größen auftreten, ist der Lösungsweg durch ein Schema leicht vorzuzeichnen. Die Rechnung selbst wird durch eine geschickt angelegte Tafel außerordentlich erleichtert, eine weitere Tafel ermöglicht die rasche Ermittlung der wichtigsten biometrischen Funktionen. Mehrere Beispiele, welche verschiedensten Forschungsgebieten entstammen, illustrieren die Methode.

F. Knoll (Wien).

Cramér, Harald: Tables for disability insurance, based on R 32 mortality. Skand. Aktuarie Tidskr. 16, 201—221 (1933).

Breuer, S.: Die Versicherung verbundener Leben. II. Versicherungsarch. 4, 135 bis 159 (1933).

Die Arbeit gibt unter Benutzung einfacher Grundformeln der Differenzenrechnung eine Ableitung für den Barwert einer alljährlich im voraus zahlbaren Leibrente für n „symmetrisch verbundene“ Leben im Alter x_1, x_2, \dots, x_n , wenn die Rente im Betrage $r_n, r_{n-1}, r_{n-2}, \dots, r_2, r_1$ zu zahlen ist, je nachdem genau n bzw. $n-1, \dots, 2, 1$ beliebige Personen von den ursprünglich Versicherten noch leben. Eine entsprechende Formel wird für den Barwert einer Todesfallversicherung symmetrisch verbundener Leben hergeleitet. Zwischen dem Barwert der verbundenen Leibrente und dem Barwert der verbundenen Todesfallversicherung besteht ein ähnlicher Zusammenhang wie zwischen den Barwerten der Einzelversicherung. Der Verf. dehnt seine Untersuchung auch auf die Todesfallversicherung mit laufender Prämienzahlung und die Versicherung unsymmetrisch verbundener Leben aus (vgl. dies. Zbl. 6, 70). v. Behr (Berlin).

Tarján, Rudolf: Zur Dynamik des Sterblichkeitsverlaufes. Versicherungsarch. 4, 637—649 (1934).

Becker, Walther: Beitrag zur Versicherung mit technischer Durchschnittsprämie. Bl. Versich.-Math. 3, 4—18 (1934).

Böhm, Friedrich: Über die Entwicklung und den gegenwärtigen Stand der Risikotheorie in der Lebensversicherung. Versicherungsarch. 4, 561—584 (1934).

Herz, Josef: Die Lebensversicherung in der zinslosen Wirtschaft. Versicherungsarch. 4, 593—598 (1934).

Numerische und graphische Methoden.

● **Jahnke, Eugen, und Fritz Emde:** Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. 2., neubearb. Aufl. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1933. XVIII, 330 S. u. 171 Fig. geb. RM. 16.—.

This well-known work, invaluable to all who make practical use of the higher transcendental functions (Gamma-function, Error-function, Elliptic Functions, Functions of Legendre and Bessel, etc.), now appears in a new and enlarged edition. Many new tables have been added, and old ones extended: in particular, spherical harmonics of the second kind and the associated spherical harmonics have been added to the section on spherical harmonics. The section on Bessel functions has been greatly extended, Nielsen's definition of the functions of the second and third kind being used throughout. Riemann's Zeta-function has been included. — In the first 77 pages some elementary functions are tabulated, and there is a section on cubic equations which gives useful graphical and tabular methods. — The tables are illustrated by graphs. In the graphical representations of complex functions, the real and imaginary parts of the function are not shown graphically (since such a representation would be completely changed if the function were multiplied by a complex constant) but the function is represented by a surface, where ordinates represent the modulus of the function.

Whittaker (Edinburgh).

Querry, J. W.: On mechanical quadratur. Skand. Aktuarie Tidskr. 16, 222—228 (1933).

Die näherungsweise Berechnung von $\int_{-m}^m f(x) dx$ wird so durchgeführt, daß die integrierte Lagrangesche Interpolationsformel für n Funktionswerte mit äquidistanten Abszissen benutzt wird, wobei jedoch die äußersten Abszissen eine gewisse Entfernung α von den Intervallenden besitzen. Es werden für gerades und ungerades n die Restglieder ausgerechnet, und es wird gezeigt, daß man günstigstenfalls α so wählen kann, daß die Quadraturformel bei $n = 2r$ für Polynome $(2r+1)$ -ten Grades genau wird, bei $n = 2r+1$ für Polynome vom Grade $2r+3$. R. Iglisch (Aachen).

Orloff, M.: Über die angenäherte Auswertung von Stieltjesintegralen. Commun. Soc. Math. Kharkow et Inst. Sci. math. Ukraine, IV. s. 6, 47—59 (1933).

Die numerische Auswertung von Integralen der Form $\int_a^b f(x) dF(x)$ kann mittels bekannter Formeln geschehen, wenn man $F'(x)$, oder (bei Anwendung der teilweisen Integration) $f'(x)$, durch einen aus Differenzen der betreffenden Funktion gebildeten Ausdruck ersetzt. Verf. gibt Beispiele und macht einige Bemerkungen über den Gebrauch nichtäquidistanter x -Werte. Nystrom (Helsingfors).

Neuendorff, R.: Zeichnerische Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung mittels Funktionsteilungen. Z. angew. Math. Mech. 13, 450—451 (1933).

Panow, D.: Über die angenäherte numerische Lösung der Gleichung $\Delta u = a^2 \frac{\partial u}{\partial t}$. Rec. math. Moscou 40, 373—391 u. dtsch. Zusammenfassung 392—393 (1933) [Russisch].

Es wird die Gleichung $\Delta u = a^2 \frac{\partial u}{\partial t}$ (1) nebst der Grenzbedingung $u = \alpha(t, s)$ (auf dem Rande eines Gebietes B) und der Anfangsbedingung $u|_{t=0} = f(x, y)$ angenähert numerisch gelöst. Die Gleichung wird durch die Differenzengleichung $\Delta u = a^2 u_t$ (2) ersetzt (u_t = die Differenz nach t ; Δ = der Laplacesche Differenzenoperator) und nach den Methoden von E. Rothe [Math. Ann. 104, 340—354 (1931); dies. Zbl. 1, 62] und Courant-Lewy-Friedrichs [Math. Ann. 100, 32—74 (1928)] betrachtet. Es wird zuerst die Hilfsgleichung $\Delta w - \lambda^2 w = -\lambda^2 \varphi$ (3) studiert (die sukzessive Lösung von Randwertaufgaben für diese Gleichung gibt die Werte von u für verschiedene t). Mit Hilfe der Eigenschaften der Gleichung (3) wird dann gezeigt, daß unter einigen Einschränkungen über die Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Anfangs- und Grenzwerte die Lösung von (2) bei genügend kleinem l (Schritt der Differenz nach t) und $h = \psi(l)$ (Schritt der Differenz nach x, y) mit beliebiger Genauigkeit die Lösung von (1) für $0 < t < T$ approximiert. Für die praktische Lösung der Aufgabe ist es weiter wichtig, daß im Falle der Existenz von $\partial^2 u / \partial t^2$ die Randwertaufgabe für die Gleichung (3) auf eine Aufgabe des Cauchyschen Typus nach t zurückgeführt wird. Man kann hier also die Adams-Störmerische Methode anwenden (was auch eine neue Methode zur Auflösung der Laplaceschen Gleichung gibt). Zum Schluß numerisches Beispiel. Janczewski (Leningrad).

Alexander, Finn: Interpolation bei Funktionen zweier Variabler. Norsk mat. Tidsskr. 15, 113—132 (1933) [Norwegisch].

Für den Fall zweier Variabler wird eine Interpolationsformel hergeleitet, die als direkte Verallgemeinerung der bekannten Newtonschen Formel mit dividierten Differenzen anzusehen ist. Ferner wird eine „Lagrangesche Formel“ aufgestellt, die 9 Funktionswerte benutzt. Für äquidistante Argumentwerte werden noch einige der wichtigsten Interpolationsformeln analog verallgemeinert, und zum Schluß geht Verf. auf die „symbolische“ Rechnungsart, die praktische Benutzung der Formeln sowie auf deren versicherungstechnische Anwendung ein. Viele Ergebnisse lassen sich auch bei n Variablen benutzen. Nystrom (Helsingfors).

Fejér, Lipót: Über unendliche Folgen, die in der Theorie der harmonischen Analyse, der Interpolation und der mechanischen Quadratur auftreten. Mat. fiz. Lap. 40, 40—54 u. dtsch. Zusammenfassung 55 (1933) [Ungarisch].

Vaughan, Hubert: Summation formulas of graduation with a special type of operator. J. Inst. Actuar. 64, 428—448 (1933).

Werkmeister, P.: Eine Walther-Rechenmaschine mit Aufspeicherwerk und Postenzählwerk. Z. Instrumentenkde 54, 26—27 (1934).

Kerl: Über eine weitere Verwendungsmöglichkeit der Doppelrechenmaschine bei der Berechnung des Richtungswinkels. Allg. Vermessgs-Nachr. 46, 36—37 (1934).

Geometrie.

Procissi, Angiolo: Il problema bernoulliano „De quadrisectione trianguli scaleni per duas normales rectas“. *Period. Mat.*, IV. s. 14, 1—27 (1934).

Thébault, V.: Sur des cercles remarquables du triangle. *Mathesis* 47, Nr 10, Suppl. 19—27 (1933).

Thébault, V.: Géométrie de l'orthopole. *Mathesis* 47, Nr 10, Suppl. 28—31 (1933).

Goormaghtigh, R.: Sur les points d'intersection des cercles circonscrit et des neuf points d'un triangle. *Mathesis* 47, 393—396 (1933).

Comerro, Rina: Nuova costruzione del decagono regolare indipendente dall'equivalenza e dalla similitudine. *Period. Mat.*, IV. s. 14, 43—46 (1934).

Yanagihara, Kitizi: On the division of the circumference of a given circle into 17 equal parts. *Tôhoku Math. J.* 38, 458—464 (1933).

Die Teilung eines Kreises k (Mittelpunkt O , Radius r) wird so gestaltet, daß sie vollständig innerhalb von k auszuführen ist, und zwar I. mit dem Zirkel allein und II. mit dem Lineal allein. Zu I wird gezeigt, daß die Konstruktion von Gérard (Enriques, *Questioni riguardanti le Matematiche elementari*, II, S. 321) an einem Kreis k' , dessen Mittelpunkt O und dessen Radius höchstens gleich $r/3$ ist, ganz innerhalb von k bleibt und daß ihr Ergebnis sich mit einem Zirkelschlage von k' auf k übertragen läßt. Dabei dient zur Bestimmung von k' die Aufsuchung eines Punktes F derart, daß sicher $OF < r/2$ ist, und die Wiederholung dieses Vorganges für den Kreis um O mit dem Radius OF . (Doch lehrt eine einfache Rechnung, daß bereits $OF < r/3$.) Zu II wird die Konstruktion von Richmond (Enriques, a. a. O., S. 310 u. *Math. Ann.* 67) benutzt, die bereits ganz innerhalb von k verläuft, aber Lineal und Zirkel verwendet; sie wird dadurch umgeformt, daß die bei ihr auftretenden Punkte mit Hilfe von k und O durch das Lineal allein gefunden werden, was 129 gerade Linien erfordert.
W. Ludwig (Dresden).

Baron, H.: Zum Tetraeder mit einem Höhenpunkt. *Jber. Deutsch. Math.-Vereinig.* 43, 183—184 (1933).

Im Tetraeder mit einem Höhenpunkt kann man diesen mit jedem der vier Ecken vertauschen. Es entsteht ein System von 5 Tetraedern mit ihren Höhenpunkten. Sätze über merkwürdige Punkte eines Tetraeders mit Höhenpunkt hatte der Verf. *Z. math. nat. Unterr.* 62, 193 (1931) bewiesen. Hier werden hauptsächlich Relationen zwischen den zu den fünf zusammengehörigen Tetraedern gehörigen merkwürdigen Punkten abgeleitet.
E. A. Weiss (Bonn).

Schippers, H. K.: Über gewisse „Kleinkreisfiguren“ auf den umschriebenen Kugeln der regulären Polyeder. *Mathematica*, Leiden 2, 139—144 (1933) u. 196—202 (1934) [Holländisch].

Géhéniau, Jules: Sur les angles solides en géométrie euclidienne à n dimensions. *Bull. Acad. Roy. Belg.*, V. s. 19, 1153—1159 (1933).

Stevens: Sur les homographies axiales de l'espace. *Mathesis* 47, 403—405 (1933).

Campedelli, Luigi: Sulle coniche focali dello spazio. *Period. Mat.*, IV. s. 14, 28 bis 42 (1934).

Libois, Paul: Géométrie des distances dans un plan isotrope. *Mathesis* 47, 406 bis 407 (1933).

Mikan, Milan: Sur une représentation plane des figures à cinq dimensions. *Acad. Tchèque Sci., Bull. int.* 33, 61—62 (1932).

Rose, R. C.: Functional equations satisfied by the fundamental functions of hyperbolic geometry, and their application to the geometry of the circle. *Indian Phys.-Math. J.* 4, 37—41 (1933).

Mukhopadhyaya, S.: Gemmative extensions of elementary chains. Tôhoku Math. J. 38, 38—49 (1933).

Die Untersuchung bezieht sich vorwiegend auf (einfache) konvexe Streckenzüge $S = AP_1P_2 \dots P_nB$, deren jeder in einem spitzwinkligen Dreieck ATB enthalten ist, welches über der Verbindungsstrecke \overline{AB} seines Anfangspunktes A mit seinem Endpunkte B steht. Jeder S bestimmt eindeutig eine Schar von Dreiecken D_ν , den sog. „Zellen von S “, deren jede gebildet wird von einer der „Seiten“ $\overline{P_{\nu-1}P_\nu}$ von S und von den Verlängerungen der anstoßenden Seiten $\overline{P_{\nu-2}P_{\nu-1}}$, $\overline{P_\nu P_{\nu+1}}$. Die erste Zelle D_1 wird gebildet von AP_1 und von Strecken auf AT sowie auf der Verlängerung von P_1P_2 ; entsprechend für D_n . Von einem vorgegebenen derartigen Streckenzuge S bzw. seiner Zellenschar $\{D_\nu\}$ kann man, unter Beibehaltung der „Ecken“ A, P_1, \dots, P_n, B zu einem neuen S_1 bzw. einer neuen Zellenschar $\{D'_\nu\}$ übergehen, indem man zwischen je zwei aufeinanderfolgende der A, P_1, \dots, P_n, B , also — allgemein zu reden — zwischen $P_{\nu-1}$ und P_ν neue Punkte P'_ν als weitere Ecken von S_1 einschaltet. P'_ν liegt dann in D_ν und soll überdies so gewählt werden, daß die Quotienten der Längen irgendwelcher Seiten von S_1 eine von vornherein fest gewählte und im folgenden stets festgehaltene positive untere Schranke k besitzen. S_1 bestimmt dann wiederum eindeutig eine Schar von Zellen D'_ν , wobei jedes D'_ν ganz in einem D_ν enthalten ist. Man bezeichne den eben beschriebenen Übergang von S zu S_1 bzw. von der Zellenschar $\{D_\nu\}$ zu der Zellenschar $\{D'_\nu\}$ als „Verfeinerung“ („gematic extension“). Die unbegrenzte Fortsetzung der Verfeinerung liefert als Durchschnitt der absteigenden Folge von Zellenscharen einen Konvexbogen. Da umgekehrt jeder „Elementarbogen“ d. h. jeder Konvexbogen, dessen vordere bzw. hintere Halbtangenten im Anfangs- bzw. Endpunkt sich schneiden, sich als ein derartiger Limes von Zellenscharen darstellen läßt, so kann man den Elementarbogen geradezu durch besagten Grenzprozeß definieren. Es entsteht so die Aufgabe, die Eigenschaften des Elementarbogens aus Eigenschaften der Zellenscharen durch Grenzübergang zu gewinnen, also z. B. die Begriffe Tangente, Sekante, Ecke usw. eines Elementarbogens sowie ihre Eigenschaften aus Begriffen herzuleiten, die zunächst nur für die Zellenscharen definiert sind. Diese Aufgabe wird in vorliegender Arbeit behandelt.

Haupt (Erlangen).

Süss, Wilhelm: Über das Inhaltsmaß bei mehrdimensionalen Polyedern. Tôhoku Math. J. 38, 252—261 (1933).

Es handelt sich um die Begründung der Inhaltsmessung im n -dimensionalen Raum ohne Stetigkeit, ein Problem, das sich mit denselben Methoden lösen läßt wie bei 2 und 3 Dimensionen. Die andere Frage der Inhaltslehre, die der Inhaltsvergleichung auf Grund der Begriffe Zerlegungsgleichheit, Ergänzungsgleichheit usw., gestattet bekanntlich nicht für alle Dimensionen die gleiche Beantwortung. Schatunovskij (Math. Ann. 57) hat für 3-dimensionale Polyeder einen Aufbau der Inhaltsmessung ohne Stetigkeit gegeben, was hier analog für n -Dimensionen durchgeführt wird. Die n -dimensionale Geometrie sei gegeben als Koordinatengeometrie, die aus der Hilbertschen Streckenrechnung gewonnen ist, und die Proportionenlehre sei nach dem Verfahren von Hilbert ohne Stetigkeit entwickelt. Aus der für $n = 2, 3$ richtigen Induktionsvoraussetzung, daß diese Grundsätze ausreichen, um in einem Raum von $n-1$ Dimensionen jedem Simplex ein Inhaltsmaß zuzuordnen — nämlich die für alle Paare von Höhe h und Inhaltsmaß G_{n-2} des zugehörigen $(n-2)$ -dimensionalen Grenzsimplaxes gleiche Zahl $\frac{1}{n-1} h G_{n-2}$ — ferner jedem Polyeder ein Inhaltsmaß, nämlich die Summe der Inhaltsmaße aller Teilsimplaxe, die für jede Teilung denselben Wert hat, folgen mit Hilfe ähnlicher Betrachtungen wie bei Schatunovskij die entsprechenden Aussagen für n -dimensionale Simplexe und Polyeder; die Summe der Inhaltsmaße aller Teilsimplaxe eines solchen Polyeders ist eine Zerlegungsinvariante, die als Inhaltsmaß bezeichnet wird. Inhaltsgleich heißen 2 Polyeder, wenn sie sich in endlich

viele Simplexe von resp. gleichem Inhaltsmaß zerlegen lassen; die Gleichheit des Inhalts zieht die Gleichheit des Inhaltsmaßes nach sich und umgekehrt. *Moufang.*

● **Study, E.: Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie. III. Das Imaginäre in der ebenen Geometrie. 2. Tl., § 9—§ 14 (Schluß). (Eduard Studys hinterlassene Manuskripte. Hrsg. v. E. A. Weiss. H. 2.) Bonn 1934. 84 S.**

Cette dernière partie des Vorlesungen du regretté Géomètre de Bonn (voir, pour la partie précédente, ce Zbl. 6, 72), commence (§ 9) par s'occuper des questions angulaires élémentaires relatives à l'espace R_4 (en particulier des questions d'orthogonalité). Dans l'espace R_3 à l'infini de R_4 , on doit considérer (l. c.) les deux droites complexes conjuguées r' et r'' , de la quadrique-absolu Q de R_4 ; ces droites sont les axes d'une transformation homographique involutive (réelle) de R_3 , qui, avec la polarité par rapport à Q , détermine un groupe trirectangle, contenant comme troisième transformation une polarité nulle, relative à un complexe linéaire de R_3 , nommé le complexe absolu de R_4 . Les plans de R_4 qui coupent R_3 suivant une droite de ce complexe, sont appelés des plans transversals, et sont en simple relation métrique avec les plans synectiques (l. c.). Le § 10 traite des chaines, suivant K. G. C. von Staudt, C. Segre et C. Juel (cfr. aussi E. Cartan, ce Zbl. 3, 68). — Les §§ 11, 12 donnent plusieurs propriétés locales des surfaces et des transformations synectiques (aujourd'hui nommées préférentiellement surfaces caractéristiques et transformations pseudoconformes), la plupart desquelles ont été déjà obtenues indépendamment par B. Segre [Rev. mat. hisp.-amer. 1928, 137, et Rend. Semin. mat. Roma (II) 7 (1931); v. ce Zbl. 3, 213]; on doit particulièrement remarquer la simple méthode de démonstration de l'a., et quelques considérations sur les surfaces de Riemann algébriques. — Les deux §§ qui restent, approfondissent certaines questions infinitésimales sur les surfaces synectiques (aussi déjà en partie traitées — avec d'autres — dans le dernier travail cité), concernant surtout les propriétés de minimum de leur aire, et celles relatives à leurs plans normaux (extension de la notion de développée d'une courbe plane analytique dans la métrique hermitienne, et caractérisation de l'élément linéaire hermitien d'une telle courbe).

Beniamino Segre (Bologna).

Algebraische Geometrie:

Servais, Cl.: Sur les courbes planes du troisième ordre. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 19, 970—985 (1933).

Zu einer ebenen elliptischen Kurve 3. Ordnung gibt es bekanntlich drei Klassen α, β, γ einbeschriebener Vierseite und, ihnen entsprechend, drei Klassen von Kegelschnitten. Es werden synthetisch Beziehungen zwischen den Vierseiten und Kegelschnitten der drei Klassen untersucht. Zum Beispiel wird (§ 1) gezeigt, wie man aus zwei einem Kegelschnitt einbeschriebenen Vierecken durch Konstruktion Pascalscher Geraden 12 Punkte finden kann, die einer C^3 angehören und sich auf ihr zu je 4 Vierseiten der drei Klassen anordnen lassen. Der Kegelschnitt selbst wird bei dieser Konstruktion ein Kegelschnitt von der Klasse γ . Wird umgekehrt (§ 2) auf einer C^3 ein Vierseit von der Klasse β vorgegeben, so gibt es auf einem Kegelschnitt von der Klasse γ ein einziges Paar von Vierecken, das mit dem Vierseit in der beschriebenen Beziehung steht. Jedes dieser Vierecke ist zu dem Ausgangsviereck in bezug auf einen Kegelschnitt Φ bzw. Φ_1 der Klasse α polar. — Weitere Sätze sind den Eigenschaften solcher Punktsysteme gewidmet, die ein Kegelschnitt von vorgegebener Klasse aus einem Vierseit von vorgegebener Klasse ausschneidet, oder den Eigenschaften solcher Vierecke, die sich durch Polarisation der Vierseite an den Kegelschnitten ergeben. (§ 3) Zusammenhang mit der Theorie zweier superponierter kubischer Involutionen. *E. A. Weiss.*

Dubreil, Paul: Sur quelques propriétés des systèmes de points dans le plan et des courbes gauches algébriques. Bull. Soc. Math. France 61, 258—283 (1933).

Wenn in einer Ebene eine Gruppe von N Punkten gegeben ist, kann man das System aller algebraischen Kurven betrachten, die jene Punkte enthalten; sie können alle als

beliebige lineare Kombinationen einer gewissen endlichen Minimalanzahl k von Kurven $F_1 = 0, F_2 = 0, \dots, F_k = 0$ (der Ordnungen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, mit $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_k$) erhalten werden. Man setze voraus, daß die zwei ersten $F_1 = 0, F_2 = 0$ dieser Kurven keinen gemeinsamen Teiler besitzen. Die Anzahl der linearen und voneinander unabhängigen Bedingungen, die einer Kurve der Ordnung l auferlegt werden müssen, damit sie die N gegebenen Punkte enthält, also dem „Ideal“ $(F_1 F_2 \dots F_k)$ angehört, sei mit $\chi(l)$ bezeichnet. Als Anwendung einiger Sätze aus der Idealtheorie studiert Verf. die Funktion $\chi(l)$. Zunächst betrachtet er die Punktgruppen, die die betrachteten Kurven auf einer Geraden allgemeiner Lage ausschneiden; dies führt zur Ungleichung $k \leq \alpha_1 + 1$; und zur Tatsache, daß $\chi(l) = N$, sobald l eine gewisse Grenze $l_0 - 1$ übersteigt. Es wird eine obere Grenze für l_0 angegeben; und es werden für N folgende zwei Ungleichungen bewiesen:

$$\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{2} \alpha_1 (\alpha_1 - 1) + \frac{1}{2} q (\alpha_1 - k + r + 1) \leq N \leq \alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{2} (k - 1) (k - 2),$$

wobei $\alpha_1 = (k - 1) q + r$ und $0 \leq r < k - 1$ ist. Der Verlauf der Funktion $\chi(l)$ wird durch einen Streckenzug dargestellt. Es folgen zahlreiche Beispiele und Anwendungen: Punktgruppen auf einem Kegelschnitt; Grenzwerte für k , wenn N, α_1, α_2 gegeben sind; verschiedene numerische Beispiele; Geschlecht der Raumkurven, die auf einer Fläche 2. Ordnung liegen; Satz von Halphen über das Maximalgeschlecht einer Raumkurve gegebener Ordnung; usw.

E. G. Togliatti (Genova).

Segre, B.: Determinazione geometrico-funzionale di gruppi di punti covarianti, relativi a due fasci lineari di curve su di una superficie algebrica. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 18, 297—302 (1933).

Es seien $|N|, |\bar{N}|$ zwei Kurvenbüschel auf einer Fläche F mit gewöhnlichen Basispunkten P_r bzw. \bar{P}_r von derselben virtuellen wie effektiven Multiplizität. λ und $\bar{\lambda}$ seien die Gruppen dieser Basispunkte, ν' und $\bar{\nu}'$ die kanonischen Punktgruppen der Kurven N und \bar{N} . $\mu = (N N)$ sei die Gruppe der Schnittpunkte einer Kurve N mit einer Kurve \bar{N} und m die Anzahl dieser Schnittpunkte. δ und $\bar{\delta}$ seien die Jacobischen Gruppen der beiden Büschel. T sei der Ort der Berührungspunkte von Kurven N mit Kurven \bar{N} , κ eine kanonische Gruppe von T , σ die Gruppe der Punkte von F , in denen zwei sich doppelt berührende Kurven N und \bar{N} sich berühren, schließlich τ die Gruppe der Punkte, in denen eine Kurve N eine Kurve \bar{N} oskuliert. Bezeichnen $\varphi = (k, k)$ und ψ die Punktgruppen der kanonischen Schar und der Schar von Severi, so gelten die Äquivalenzen

$$\kappa \equiv 2\varphi + 6(\nu' + \bar{\nu}') + 8\mu - 2(\lambda + \bar{\lambda}),$$

$$\delta \equiv \psi + 2\nu' + \lambda \quad [\text{Def. von } \psi],$$

$$\tau \equiv 2\varphi + \psi + 6(\nu' + \bar{\nu}') + 12\mu - 3(\lambda + \bar{\lambda}),$$

$$\sigma \equiv -6\varphi + 2\psi + 4(2m + p + \bar{p} - 12)\mu + 2(m + \bar{p} - 11)\nu' \\ + 2(m + p - 11)\bar{\nu}' + 8(\lambda + \bar{\lambda}).$$

Aus ihnen folgen natürlich die entsprechenden Anzahlsätze. *van der Waerden.*

Jung, Heinrich W. E.: Sui gruppi di punti sopra una superficie e sulla serie di Severi, dal punto di vista della teoria dei corpi algebrici. Mem. Accad. Ital., Mat. 4, 403—413 (1933).

I. Es werden zwei gleichwertige analytische Definitionen des von Severi (vgl. dies. Zbl. 5, 176) eingeführten Begriffs der Punktgruppe auf einer algebraischen Fläche angegeben. Es seien u, v Ortsuniformisierende einer Stelle P der Fläche und U, V zwei teilerfremde Potenzreihen, welche in P beide Null werden. 1. Die Auflösung des Schnittpunkts P der Kurven $U = 0$ und $V = 0$ nach Noether ergibt eine Reihe von „Punktprimteilern“ $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_r$ (Kurven, in welche P und seine unendl. benachbarten Punkte durch die Auflösung übergehen) mit Exponenten $\alpha_1, \dots, \alpha_r$. Dann wird gesetzt (1. Def.): $[UV]_S = \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1^{\alpha_1} \mathfrak{B}_2^{\alpha_2} \dots \mathfrak{B}_r^{\alpha_r}$; $(U, V)_S = \sum \alpha_i$ heißt

die Ordnung von $[U, V]_S$. 2. Eine Potenzreihe $\mathfrak{P} = U + \lambda V$ definiert eine Kurve $\mathfrak{P} = 0$; auf einem Zweig \mathfrak{z}_i dieser Kurve definiert die Funktion $U + \lambda V$ einen Divisor $\mathfrak{z}_i^{\nu_i}$. Dann wird gesetzt (2. Def.): $[U, V]_S = \mathfrak{z} = \mathfrak{z}_1^{\nu_1} \mathfrak{z}_2^{\nu_2} \dots \mathfrak{z}_r^{\nu_r}$. Die beiden Definitionen sind äquivalent in dem Sinne, daß jeder durch \mathfrak{P} teilbare Divisor (= Kurve mit evtl. mehrfachen Bestandteilen) der Fläche auch durch \mathfrak{z} teilbar ist und umgekehrt. — Eine „endliche Punktgruppe“ ist ein beliebiges Produkt von „Punkten“ $[U, V]_S$. Ein Produkt $\mathfrak{X}G$ eines Divisors \mathfrak{X} mit einer „endlichen Punktgruppe“ G heißt eine „Punktgruppe“. Zwei beliebige Divisoren $\mathfrak{G}, \mathfrak{H}$ definieren als ihren „vollständigen Schnitt“ eine Punktgruppe $(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$, die man findet, indem man an jeder Stelle S setzt $\mathfrak{G} = \mathfrak{X}U$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{X}V$, wo \mathfrak{X} der G. G. T. von \mathfrak{G} und \mathfrak{H} ist. II. Zwei Punktgruppen $\mathfrak{X}_1 G_1$ und $\mathfrak{X}_2 G_2$ heißen nach Severi äquivalent, wenn es (unter gewissen Nebenbedingungen) drei Divisoren $\mathfrak{Z}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ und eine Punktgruppe g auf \mathfrak{Z} gibt, derart daß $\mathfrak{X}_1 \mathfrak{G}_1 \sim \mathfrak{X}_2 \mathfrak{G}_2$ und daß die auf der Kurve $\mathfrak{Z} = 0$ von \mathfrak{G}_1 und \mathfrak{G}_2 ausgeschnittenen Punktgruppen nach Weglassung des gemeinsamen Faktors g genau mit G_1 und G_2 übereinstimmen. III. Zu jedem Differential $dw = A dx + B dy$ gehört eine kanonische Punktgruppe, die man erhält indem man das Differential an jeder Stelle auf die Form $\mathfrak{X}(Udu + Vdv)$ bringt und dann aus den „Punkten“ $[U, V]_S$ und dem Divisor \mathfrak{X} die Punktgruppe $\mathfrak{X}G = \mathfrak{X}II[U, V]_S$ bildet. Die kanonische Gruppe hat (in Gegensatz zu der von Severi zu ihrer Definition benutzten Jacobi'schen Gruppe) für ein beliebiges (auch nichtexaktes) Differential einen Sinn. IV. Ist ϑ die Ordnung von G und \mathfrak{R} ein Divisor der kanonischen Klasse, so ist die Zahl $\vartheta + (\mathfrak{X} \cdot \mathfrak{R}) - (\mathfrak{X} \cdot \mathfrak{X}) = I + 4$ vom Differential unabhängig. Das ist die einfachste Definition der Zeuthen-Segreschen Invariante I . V. Wenn zwei Differentiale dieselbe kanonische Gruppe definieren und gewisse Nebenbedingungen erfüllt sind, so unterscheiden sie sich nur um einen konstanten Faktor. VI. Kombiniert man die obige Formel mit $12(p_a - 1) = I + 4 + (\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$ und nimmt insbesondere $dw = \alpha dx + \beta dy$, so erhält man einen einfachen Ausdruck für das arithmetische Geschlecht p_a , ausgedrückt durch die Verzweigungselemente der Fläche in bezug auf die unabhängigen Veränderlichen x und y .
van der Waerden (Leipzig).

Longhi, Ambrogio: Ricerche sulle falde delle rigate algebriche. Mem. Accad. Sci. Torino, II. s. 67, Nr 14, 1—26 (1933).

Einer analytischen Regelfläche des Raumes S_3 entspricht in der Kleinschen Abbildung eine analytische Kurve C auf einer V_4^2 des S_5 und umgekehrt. Was dabei den Zweigen von C entspricht, sind die Blätter der Regelfläche. Der Tangente, der Schmiegungeebene und den Schmiegungräumen eines Zweiges von C in einem Punkte P entsprechen das System der berührenden linearen Komplexe, eine Schmiegungsregelschar, eine Schmiegungskongruenz und ein Schmiegungskomplex des Blattes für die Gerade g . Die charakteristischen Zahlen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ eines Zweiges von C heißen Rangzahlen des entsprechenden Blattes (α ist die Vielfachheit des Punktes P , $\alpha + \alpha_1$ die Schnittmultiplizität des Zweiges mit einer berührenden Hyperebene, usw.). Weil C auf einer V_4^2 liegt, bestehen zwischen den Rangzahlen gewisse Beziehungen, darunter die Ungleichung $\alpha \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$. Liegt die Tangente von C auf der V_4^2 , so heißt das Blatt singulär. Die Tangenten des Blattes in den Punkten von g bilden in diesem Fall ein Strahlenbündel und ein Strahlenfeld statt, wie sonst immer, einen speziellen linearen Komplex. Für nicht singuläre Strahlen gilt entweder $\alpha = \alpha_1$ oder $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ oder $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ oder $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$. Die einzelnen auftretenden Fälle werden sorgfältig durchdiskutiert. — Die Anzahl der singulären Blätter einer nichtabwickelbaren algebraischen Regelfläche vom Geschlechte p ist $2(n + 2p - 2) - 2 \sum (\alpha - 1)$, wobei jedes singuläre Blatt mit einer genau angegebenen Vielfachheit gezählt wird. Für die abwickelbaren Regelflächen (deren Blätter alle singulär sind) bestehen bestimmte Relationen zwischen den Rangzahlen α der Blätter und denen der Zweige der Rückkehrkurve, aus deren Tangenten die Regelfläche besteht. Ordnung und Geschlecht der Regelfläche, sowie Ordnung und

Rang der Rückkehrkurve, lassen sich berechnen aus den Rangzahlen der Blätter und den Anzahlen derjenigen singulären Blätter, welche statt einer Schmiegungsregelschar ein Schmiegungsstrahlenfeld oder ein Schmiegungsstrahlenbündel besitzen.

van der Waerden (Leipzig).

Mikan, Milan: Exemple d'une correspondance de Cremona dans l'espace à cinq dimensions. Acad. Tchèque Sci., Bull. int. 33, 63—64 (1932).

Topologie:

● Kuratowski, Casimir: Topologie. I. Espaces métrisables, espaces complets. (Monogr. mat. Tom 3.) Warszawa u. Lwów: Subwencji Funduszu Kultury Narodowej 1933. IX, 285 S. \$ 4.50.

Seitdem die mengentheoretische Topologie in den letzten zwei Dezennien nicht nur selbst zu einem großen Gebiete der mathematischen Forschung geworden ist, sondern auch gewisse Nachbargebiete, vor allem die sog. deskriptive Theorie der Punktmengen und reellen Funktionen in ihre Bahn gezogen und schließlich zu einem ihrer Kapitel gemacht hat, entstand die Notwendigkeit, die rein mengentheoretische Richtung in der Topologie und die deskriptive Mengenlehre als ein einheitliches Ganzes darzustellen. Diese Aufgabe wird im vorliegenden Buch gestellt und vollständig gelöst. Der Band beginnt mit einer Zusammenfassung der abstrakt-mengentheoretischen Begriffe und der dazugehörigen logisch-mathematischen Symbolik. Darauf folgt im ersten Kapitel eine ausführliche und sehr sorgfältige Darstellung der elementaren Theorie der topologischen Räume, beginnend mit den Axiomen des topologischen Raumes, auf die dann die abgeschlossenen und offenen Mengen, die Dichtigkeitseigenschaften usw. folgen. Das Kapitel endet mit der Theorie der stetigen Abbildungen topologischer Räume. Der erste Abschnitt des zweiten Kapitels ist im wesentlichen dem Übergang von den topologischen Räumen zu den metrischen gewidmet. Der Reihe nach werden die Trennungs- bzw. Abzählbarkeitsaxiome eingeführt und schließlich der Urysohn'sche Metrisationssatz bewiesen. Auch der Metrisationssatz für den allgemeinen Fall findet hier Platz. Die Trennungsaxiome werden im Zusammenhang mit dem Begriff der kombinatorischen Äquivalenz zweier Mengensysteme eingeführt, fast gleichzeitig kommt auch der Begriff des Nerven eines Mengensystems und mit ihm die denkbar allgemeinste Form des Überführungssatzes, womit auch die Perspektive der kombinatorischen Methoden in der mengentheoretischen Topologie dem Leser eröffnet wird. Nach einer Darstellung der Mächtigkeitssätze für Mengen und Mengen- (auch Funktionen-) Systeme wird im Abschnitt III auf 17 Seiten eine ihrer Kürze und Einfachheit nach geradezu überraschende Darstellung der wichtigsten Tatsachen der allgemeinen mengentheoretischen Dimensionslehre (gleich für den allgemeinsten Fall) gegeben. Nach einer ausführlichen Darstellung der Produkträume und der Mengenfolgen kommt Verf. im V. Abschnitt zu der Theorie der Borelschen Mengen und Baireschen Funktionen, die ebenfalls in großer Vollständigkeit, Einfachheit und Allgemeinheit geboten wird. Das dritte und letzte Kapitel ist den vollständigen Räumen gewidmet. Man findet hier zuerst die „elementare“ Theorie, einschließlich verschiedener Erweiterungssätze (darunter der Brouwer-Tietz'sche und der Lavrentieff'sche Erweiterungssatz für Abbildungen), die Vollständigkeit der G_δ -Mengen und anschließende Sätze, die Invarianz- und Mächtigkeitssätze für Borelsche Mengen usw. Der Schluß des Kapitels ist der Theorie der Suslinschen A -Mengen (von Lusin nachher als „analytische“ Mengen bezeichnet) sowie deren Verallgemeinerung — den Lusinschen projektiven Mengen — gewidmet. Es werden nur projektive Mengen endlicher Klassen ausführlich behandelt. Das Buch setzt keinerlei spezielle Vorkenntnisse voraus, vereinigt jedoch seinen elementaren Charakter mit einer nahezu enzyklopädischen Vollständigkeit und stellt jeden Abschnitt der Theorie in derjenigen Allgemeinheit dar, die dem Wesen der Sache entspricht. Das Buch, das in vielen Teilen eigentlich eine selbständige Untersuchung ist, kann nichtsdestoweniger als Lehrbuch und als Nachschlagewerk gebraucht werden.

P. Alexandroff (Moskau).

Borsuk, Karol: Zur kombinatorischen Eigenschaft der Retrakte. Fundam. Math. 21, 91—98 (1933).

Falls es eine stetige Abbildung f des metrischen Raumes A auf seine Teilmenge B gibt, bei der B punktweise festbleibt, so heißt B ein Retrakt von A ; f heißt dann eine retrahierende Abbildung. Die Begriffe Umgebungsretrakt, absoluter (Umgebungs-)Retrakt, Deformationsretrakt, die Verf. in Fundam. Math. 19, 220—242 (1932); dies. Zbl. 5, 265, eingeführt hat, liegen dann auf der Hand. Es wird bewiesen: Eine retrahierende Abbildung erzeugt im Falle der Kompaktheit von A eine homomorphe Abbildung sämtlicher Bettischen Gruppen von A in die entsprechenden Gruppen von B ; liegt insbesondere eine retrahierende

Deformation vor, so ist der erwähnte Homomorphismus ein Isomorphismus. Der Satz wird angewandt auf den Beweis der Tatsache, daß es zu jedem absoluten Umgebungsretrakt ein Polyeder gibt von der Eigenschaft, daß die Bettischen Gruppen des Retraktes homomorphe Bilder der betreffenden Gruppen des Polyeders sind. Hieraus folgt insbesondere, daß die Bettischen Gruppen absoluter Umgebungsretrakte Abelsche Gruppen mit endlich-vielen Erzeugenden sind. Es ist dabei zu beachten, daß laut früherer Resultate des Verf. [Fundam. Math. **19**, 240 (1932); dies. Zbl. **5**, 265] die absoluten Umgebungsretrakte im Falle endlicher Dimension mit den lokal zusammenziehbaren kompakten Räumen identisch sind. Die obigen Homomorphiesätze gelten auch für Fundamentalgruppen der Retrakte.

P. Alexandroff (Moskau).

Borsuk, Karol: Über stetige Abbildungen der euklidischen Räume. Fundam. Math. **21**, 236—243 (1933).

Es werden Abbildungen des R^n in sich betrachtet, bei denen die Urbilder sämtlicher Punkte gleichmäßig beschränkt sind. Es wird bewiesen, daß dann die $(n - 1)$ -dimensionale Bettische Zahl der Bildmenge verschwindet, daß m. a. W. das Bild den Raum nicht zerlegt. Macht man die stärkere Voraussetzung, daß alle (ihrem Durchmesser nach) hinreichend kleinen Mengen gleichmäßig beschränkte Urbilder haben, so ist die Bildmenge mit dem ganzen R^n identisch. Für $n \leq 2$ ist die Bildmenge (unter der einzigen Voraussetzung, daß die Urbilder sämtlicher Punkte gleichmäßig beschränkt sind) dem R^n homöomorph. Ob dies auch für $n > 2$ richtig ist, weiß man zur Zeit nicht.

P. Alexandroff (Moskau).

Glume, Raymond: Un exemple d'espace topologique qui n'est pas un espace V . Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **2**, 223—224 (1933).

Es wird durch ein Beispiel gezeigt, daß, wenn man den Begriff des topologischen Raumes in bekannter Weise auf den Begriff der Ableitung zurückführt und dabei vom letzteren nur verlangt, daß $a \in (M - a)'$ mit $a \in M'$ äquivalent ist, es topologische Räume gibt, die keine Umgebungsräume sind.

P. Alexandroff (Moskau).

Hurewicz, Witold: Über Abbildungen von endlichdimensionalen Räumen auf Teilmengen Cartesischer Räume. S.-B. preuß. Akad. Wiss. H. **24/25**, 754—768 (1933).

Nach Menger ist jeder n -dimensionale kompakte Raum homöomorph mit einer Teilmenge des euklidischen E_{2n+1} [Beweis für $n = 1$: Menger, Dimensionstheorie (1928), S. 296; allgemein: Nöbeling, Math. Ann. **104**, 71; Pontrjagin und Tolstova, Math. Ann. **105**, 734; vgl. dies. Zbl. **3**, 172; Lefschetz, Ann. of Math. **32**, 521; dies. Zbl. **3**, 26]. Verf. verallgemeinert diesen Satz in folgender Weise: Ein n -dimensionaler kompakter Raum A läßt sich derart auf eine Teilmenge des E_{n+m} ($m = 1, 2, \dots$) eindeutig und stetig abbilden, daß für $k = 2, 3, \dots$ die Punkte derselben mit mindestens k Urbildpunkten eine höchstens $(n - (k - 1)m)$ -dimensionale Menge bilden (dabei ist unter einer Menge mit negativer Dimension die leere Menge verstanden). Man kann sogar jede stetige Abbildung von A auf eine Teilmenge des E_{n+m} durch eine beliebig kleine Abänderung in eine den Bedingungen des Satzes genügende Abbildung überführen. Als Folgerung ergibt sich u. a.: Die Dimension eines kompakten Raumes ist die kleinste Zahl n mit der Eigenschaft, daß sich der Raum stetig auf eine nirgends dichte Teilmenge des E_{n+1} so abbilden läßt, daß jeder Punkt derselben nur endlich viele Urbildpunkte hat. — Der Beweis ist höchst elegant und liefert für den Fall $m = n + 1$ den obigen Mengerschen Satz auf knapp $1\frac{1}{2}$ Seiten.

Nöbeling (Erlangen).

Mechanik.

● **Brown, Ernest W., and Dirk Brouwer:** Tables for the development of the disturbing function, with schedules for harmonic analysis. London: Cambridge univ. press. 1933. VIII, 86 S. 10/6.

Agostinelli, C.: Sulla curvatura geodetica delle traiettorie dinamiche. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 18, 119—122 (1933).

The author calls attention to the fact that the results of a recent note by E. Gugino on the geodesic curvature of dynamical trajectories (this Zbl. 7, 180) have already been established by him (this Zbl. 6, 369) "in modo più rapido e più semplice". The present work consists mainly of a résumé of the author's earlier paper, and concludes with a formula for the torsion of dynamical trajectories. *H.S. Ruse* (Princeton).

Tallqvist, Hj.: Über einen Grenzfall des Zweizentrenproblems. Soc. Sci. Fennica. Comment. phys.-math. 7, Nr 4, 1—110 (1933).

The general problem of the motion of a heavy particle under the influence of a Newtonian doublet, a center attracting according to the inverse square law, and one attracting with a force proportional to the distance, is solvable by quadratures, in general leading to elliptical integrals. This paper studies these motions in detail, including graphs of equipotentials, computations and graphs of typical orbits, and a study of straight line motions. The cases treated are, in order, the doublet alone, the doublet and attracting Newtonian center, the doublet and repelling Newtonian center, the doublet and attracting first power center, the doublet and repelling first power center, and finally the general case. *Philip Franklin* (Cambridge).

Carathéodory, C.: Über die strengen Lösungen des Dreikörperproblems. S.-B. Bayer. Akad. Wiss. H. 2, 257—267 (1933).

The author remarks, that the usual investigations of the rigorous solutions of the Problem of Three Bodies (the case of "Lagrange's particles"), either presuppose the reduction-theory of the general problem, or else consider only the plane problem. Here he shows that by using a system of variables due originally to Euler, the problem can be solved very simply. *Whittaker* (Edinburgh).

Dobrovolsky, V. P.: Sur la gravitation dans le problème des trois corps. S.-B. math.-naturwiss.-ärztl. Sekt., ukrain. Ševčenko-Ges. Wiss. Lemberg H. 18, 3—6 (1933).

Matukuma, Takehiko: Periodic orbits in Hill's case. III. (Periodic ejectional orbit.) Proc. Imp. Acad. Jap. 9, 364—366 (1933).

In Fortsetzung von Untersuchungen über die synodische Bewegung eines Satelliten (s. dies. Zbl. 4, 373) wird der Frage nachgegangen, ob zu der Familie der von Hill und Poincaré diskutierten periodischen Schleifenbahnen auch eine periodische Ejektionsbahn (durch den Ort des Planeten) gehört. Numerische Experimente machen wahrscheinlich, daß erst für negativ unendliche Werte der Jacobischen Konstanten die periodische Schleifenbahn zur Ejektionsbahn wird. *A. Klose* (Berlin).

Véronnet, Alex.: Évolution complète d'une masse hétérogène en rotation. Impossibilité d'un dédoublement. C. R. Acad. Sci., Paris 197, 1287—1289 (1933).

The author obtains sharp qualitative results by framing an equipotential surface of the given heterogeneous mass between two ideal equipotential surfaces, one due to a homogeneous ellipsoidal mass and the other (figure de Roche) to a mass concentrated at a point. Among other things is stated the result that the formation of double stars can not be explained by the mere hypothesis of rotating contracting heterogeneous masses. *Daniel C. Lewis jr.* (Baltimore, Maryland).

Arrighi, G.: La statica dei galleggianti e la dinamica delle isocarene. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 18, 215—218 (1933).

Der Verf. leitet — frühere Untersuchungen (vgl. dies. Zbl. 5, 81; 6, 418; 7, 178) fortsetzend — in einfacher Weise einfache Sätze über Gleichgewicht und Bewegung eines schwimmenden Körpers ab. Hierbei wird die italienische Vektorsymbolik verwendet. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Astronomie und Astrophysik.

● **Mineur, H.:** Histoire de l'astronomie stellaire jusqu'à l'époque contemporaine. (Actualités scient. et industr. Nr. 115.) Paris: Hermann & Cie. 1934. 57 S. Frs. 15.—.

Sternfeld, Ary J.: Méthode de détermination de la trajectoire d'un corps en mouvement dans l'espace interplanétaire par un observateur lié au système mobile. C. R. Acad. Sci., Paris 198, 333—334 (1934).

Dingle, Herbert: The age of the universe and its bearing on astronomical problems. Publ. Astron. Soc. Pacific 45, 159—170 (1933).

Eigenson, M.: Certain questions on the problem of two bodies with variable mass and their application to the super-system of galaxies. Russ. Astron. J. 10, 310—323 u. engl. Zusammenfassung 323—326 (1933) [Russisch].

Die Arbeit betrachtet unter stark formalen Gesichtspunkten die Bewegung einer Einheitsmasse im Felde einer kugelförmigen, zeitlich abnehmenden Zentralmasse nach der Newtonschen Mechanik. Die in diesem Problem auftretenden positiven Radialgeschwindigkeiten veranlassen den Autor zur Anwendung seiner Ergebnisse auf die Radialgeschwindigkeiten außerhalb galaktischer Nebel. *Heckmann* (Göttingen).

Gerasimovič, B. P.: The contours of emission lines in expanding nebular envelopes. Z. Astrophys. 7, 335—349 (1933).

Ohne ein bestimmtes dynamisches Modell zugrunde zu legen, behandelt der Verf. das Problem rein phänomenologisch unter verschiedenen Annahmen über die Geschwindigkeitsverteilung in der vollkommen durchsichtigen Nebelhülle. Gleichförmige Bewegung der Nebelhülle liefert abgeflachte, trapezartige Linienkonturen, wie sie von Beals in drei Wolf-Rayet-Sternen beobachtet worden sind; quantitativ lassen sich aber die beobachteten Konturen nicht allein auf Grund einer inneren Geschwindigkeitsverteilung der Nebelgase (Dopplereffekt thermischer oder turbulenter Art) darstellen. Die Annahme einer durch den Stern beschleunigten oder verzögerten Nebelhülle (Geschwindigkeit proportional einer beliebigen Potenz des Nebelradius) liefert eine so schmiegsame Formel für die Linienkontur, daß sämtliche beobachteten trapezartigen, spitzen oder abgerundeten Formen sich darstellen lassen. Ist die Übergangswahrscheinlichkeit der betreffenden Linie bekannt, so läßt sich aus spektralphotometrischen Messungen die Gesamtzahl der emittierenden Atome in der Nebelhülle pro Quadratzentimeter Sternoberfläche ermitteln und bei Kenntnis des Sternradius und des Beschleunigungsgesetzes auch der Massenverlust des Sterns in der Zeiteinheit, sowie die Gesamtmasse der Schale über der „nicht emittierenden“ Schicht. Gibt man die Voraussetzung völliger Transparenz der Nebelhülle für ihre Eigenstrahlung auf, so werden die Verhältnisse so verwickelt, daß der Verf. sich mit einigen mehr qualitativen Resultaten begnügt. *R. Wildt* (Göttingen).

Reichenbächer, Ernst: Die Symmetrie der Spiralen. Z. Astrophys. 7, 364—368 (1933).

Indem der Verf. sich zwischen den außergalaktischen Nebeln eine (durch die Allg. Rel.-Theorie einigermaßen motivierbare) Kraft vom Potential $1 - 2m/r + \lambda/3 \cdot r^2$ wirkend denkt, sieht er eine Erleichterung für die Jeanssche Hypothese, daß die Spiralarme solcher Nebel durch Gezeitenwirkung symmetrisch an 2 einander gegenüberliegenden Punkten ansetzen. Denn aus dem angenommenen Potential folgt, daß jeder Nebel (bei genügend großem λ auch in verhältnismäßig großer Nähe bei seinem Zentrum) eine Zone besitzt, wo seine Anziehung in Abstoßung übergeht. In dieser Zone liegende Materie ist gegen äußere Kräfte sehr empfindlich. *Heckmann* (Göttingen).

Chandrasekhar, S.: The solar chromosphere. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 94, 14—35 (1933).

Current theories of the chromosphere ascribe its support against gravity either to selective radiation pressure (Milne) or to turbulence. The first has been criticised on the ground that it does not apply in its original form to all the gases observed in the chromosphere. The present author criticises the latter on the ground that it gives no reason for the turbulent velocities it has to assume, and makes unwarranted use of an "apparent" temperature corresponding to these velocities. He now proposes a variant of the theory of radiative support, depending on the observed fact that the flux of radiation in the chromospheric lines varies by a factor of 2 or 3 over an average distance of the order of 10,000 kilometres over the sun's surface. He

assumes that this variation is periodic over the surface with a mean value corresponding to that required exactly to support an atom of the gas considered against solar gravity. He then proceeds to study the trajectories of atoms exposed to this radiation. In his view the chromosphere will consist of those whose trajectories turn out to be periodic. In the model which he considers in detail the base of the chromosphere is taken to define the (x, y) plane and z is measured vertically upwards. The radiation intensity is taken as

$$I(x, y) = I_0 + I_1 \sin 2\pi x/\lambda, \quad (I_0, I_1 \text{ constant}) \quad (1)$$

and $I_0 = 4 mg/B_{1 \rightarrow 2}$, corresponding to full support (m = atomic mass, g = acceleration due to gravity, $B_{1 \rightarrow 2}$ = Einstein absorption coefficient). He treats the problem as a hydrodynamical one, and so employs an equation of continuity which means that in discussing the density distribution he must assume the velocity is a single-valued function of position. The field of force resulting from (1) has components

$$H_x = \frac{1}{4} B_{1 \rightarrow 2} I_1 \cos \xi \cdot \zeta K_0(\zeta), \quad H_z = \frac{1}{4} B_{1 \rightarrow 2} I_1 \sin \xi \cdot \zeta K_1(\zeta),$$

where $\xi = 2\pi x/\lambda$, $\zeta = 2\pi z/\lambda$, and

$$K_\nu(\zeta) = \{I(\nu + \frac{1}{2})(2\zeta)^\nu / \Gamma(\frac{1}{2})\} \int_0^\infty \frac{\cos \xi \lambda \xi}{(\xi^2 + \zeta^2)^{\nu+1/2}} d\xi.$$

From this the equations of motion can be written down, and the equation to the atomic trajectory obtained in the form

$$\sin \xi + \frac{\alpha}{\beta} \int_\xi^{\xi_0} \zeta K_1(\zeta) d\zeta,$$

where a necessary and sufficient condition that it should be periodic in ξ has been imposed, and α, β are constants depending on circumstances of the motion. A diagram illustrates the possible forms of these trajectories. The resulting law for the gradient of the density ρ under certain approximations is

$$\frac{\partial \rho}{\partial \zeta} = -e_0 \cdot \frac{2}{\pi} \zeta K_1(\zeta),$$

which is shown to mimic numerically the exponential law which fits the observed data. Also the total number of atoms per unit column is about equal to that in a uniform column of height $\lambda/5$ and density equal to that at the base of the chromosphere. The mean horizontal velocity of the chromospheric atoms is given by the theory as being of the order 70 km/sec., which is consistent with observation. A further consequence also borne out by observation is the existence of a sharp outer boundary of the chromosphere. The relation of prominences to the chromosphere seems to follow naturally; and the emission of moderately high speed atoms

would be predicted corresponding to aperiodic orbits. A table for $\zeta K_0(\zeta), \zeta K_1(\zeta), \int_0^\zeta \zeta K_1(\zeta) d\zeta$ is appended.

W. H. McCrea (London).

Steensholt, Gunnar: On the stability of Atkinson's star models. *Z. Astrophys.* **7**, 373—377 (1933).

The author has previously worked out the equilibrium states of stellar models [*Z. Astrophys.* **5**, 140 (1932); this *Zbl.* **5**, 268] in which the source of energy-generation is that studied by Atkinson. He now evaluates, with certain approximation, the coefficient of stability, as defined by Rosseland (this *Zbl.* **4**, 287), for these stars. The chief approximation is to consider only the fundamental oscillation and to take its amplitude proportional to the distance from the centre, which would be true if the density were uniform. The numerical results indicate that the model stars are unstable.

W. H. McCrea (London).

Woltjer jr., J.: Note on the energy equation. *Bull. Astron. Inst. Netherlands* **7**, 127—128 (1933).

The equation expressing the conservation of energy for matter moving in a field of radiation is framed so as to involve the flux of radiation with respect to a surface element moving with the matter, and not to one fixed in space. *McCrea.*

Meurers, Joseph: Sternmodelle mit der Zustandsgleichung $p \propto \rho^\mu \cdot T^\nu$. *Z. Astrophys.* **7**, 350—356 (1933).

Um auch die Fälle, in denen sich die Sternmaterie nicht wie ein ideales Gas verhält, zu erfassen, setzt Verf. für den Gasdruck eine Beziehung von der Form $p = c_2 \cdot \rho^\mu \cdot T^\nu$

an und untersucht die Abhängigkeit der Dichteverteilung von μ und ν . Damit sich eindeutig bestimmte Modelle ergeben, wird ferner $T = \Theta \cdot \varrho^m$ angenommen. Aus diesen Beziehungen und den Grundgleichungen des Sternaufbaus ergibt sich eine Differentialgleichung 2. Ordnung in ϱ und r , deren Diskussion zeigt, daß alle Sternmodelle, für die $\mu + m\nu = \text{konst.}$ und $c_2 \cdot \Theta^r = \text{konst.}$ ist, die gleiche Dichteverteilung besitzen, wenn für Θ und m bestimmte Werte festgelegt werden. In einem solchen System homologer Sterne wird der einzelne Stern durch μ oder ν und die 2 Integrationskonstanten der Diff.-Gleichung charakterisiert. Diese Ergebnisse werden anschließend graphisch erläutert unter besonderer Berücksichtigung der polytropen Modelle, wobei sich u. a. ergibt, daß ein nach der Polytropen 3 aufgebaute Stern nicht notwendig aus idealem Gas zu bestehen braucht.

Klauder (Jena).

Zeise, H.: Spektralphysik und Thermodynamik. Die Berechnung von freien Energien, Entropien, spezifischen Wärmen und Gleichgewichten aus spektroskopischen Daten und die Gültigkeit des dritten Hauptsatzes. I. Allgemeiner Teil. II. Teil: Einige ausgewählte Fälle und Grundsätzliches. Z. Elektrochem. 39, 758—773 u. 895—909 (1933).

Sammelreferat. I. Teil. The work is a review of the methods of calculating the thermodynamic functions from the statistical theory of an assembly, and of the methods of using spectroscopic data to give the properties of the assembly when it is composed of a gas of monatomic, di-atomic, or multi-atomic molecules. The standard statistical methods involving the use of a partition function are summarised. It is then shown how to formulate this function for a monatomic gas. Secondly the case of a di-atomic gas is considered in detail, showing how to calculate the partition function for the electron levels, the vibration levels, the rotation levels according as the nuclei are, or are not, identical, and according as they have, or have not, a non-zero spin, and according as the normal state of the molecule is a Σ or ${}^2\Pi$ state. The case of coupling between the vibration and rotation is also treated, and the isotope effect considered. Finally certain approximate formulae are given for the total entropy etc. Thirdly, a comprehensive survey is given of the corresponding results, so far as they have yet been worked out, for molecules with three or more atoms. — II. Teil. Examples are given comparing the values of the thermodynamic functions calculated by the preceding methods with experimental values, using the results of a large number of authors. Cases of di-atomic molecules with different electronic normal states, linear and triangular tri-atomic molecules, tetrahedral, pyramidal and double-pyramidal, and ring multi-atomic molecules are discussed in detail. The conclusion is that the theoretical "spectroscopic-statistical" values of the thermodynamic functions are reliable for monatomic and diatomic molecules, but to some extent uncertain for multi-atomic molecules due either to uncertainty in the interpretation of the spectroscopic data, or to theoretical difficulties in dealing with rotating systems with three unequal moments. The paper ends with a summary of the views of various authorities on the range of validity of Nernst's Heat Theorem, based on the type of data here collated.

W. H. McCrea (London).

Pannekoek, A.: Critical remarks on the central intensity in Fraunhofer lines. Bull. Astron. Inst. Netherlands 7, 151—158 (1933).

After remarking that central intensities of less than 0,1 of the continuous background in Fraunhofer lines may be due to instrumental effects, but that a number of strong lines show a much greater central intensity which must be largely real, the author examines theories suggested for the explanation of this result. The first such theory attributes the central intensity to the effect of absorption of the relevant frequency, either by continuous absorption or through the mechanism of inelastic and superelastic collisions, as opposed to scattering, when the frequency is re-emitted unchanged in value. In a former paper [Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 91, 139 (1930)] he has shown however that this can explain only a very small part of the central

intensity, and he does not consider that subsequent developments have removed the difficulty. Moreover it meets a further trouble, for it requires that a spectral line should have decreasing central intensity with increasing distance from the centre of the solar disc, owing to the fact that it is formed at increasing heights in the solar atmosphere where the absorption should be decreasing. The reverse effect is observed, and hence the mechanism producing the finite central intensity cannot tend to zero at the top of the solar atmosphere. The author then examines in detail a suggestion due to Unsöld that the central intensity of a given line is due to radiation exchanges with other energy levels besides the two levels responsible for the line itself. He works out some specific examples of cyclical transitions amongst a set of energy levels, but concludes that for solar lines the effect on the central intensity is scarcely appreciable. The paper itself should be consulted for references to the theories under review.

W. H. McCrea (London).

Quantentheorie.

● **Hand- und Jahrbuch der chemischen Physik.** Hrsg. v. A. Eucken u. K. L. Wolf. Bd. 1, Absehn. 1. — **Kramers, H. A.: Theorien des Aufbaues der Materie. I. Die Grundlagen der Quantentheorie.** Leipzig: Akad. Verlagsges. m. b. H. 1933. 222 S. u. 10 Fig. RM. 18.—.

In den fünf Abschnitten dieses Lehrbuches (1. Quantentheorie des freien Massenteilchens, 2. die unrelativistische Quantentheorie des nicht-freien Massenteilchens, 3. die unrelativistische Behandlung des Mehrteilchenproblems, 4. Transformationstheorie, 5. Störungstheorie) werden sowohl die leitenden physikalischen Gesichtspunkte der Quantentheorie — unter besonderer Berücksichtigung von Bohrs neueren prinzipiellen Untersuchungen — wie die grundlegenden mathematischen Methoden der Wellen- und Quantenmechanik, ohne große Ansprüche an Vorkenntnisse des Lesers zu stellen, sehr eingehend behandelt. Es wird ein zweiter speziellerer Teil angekündigt.

O. Klein (Stockholm).

Bohr, N., und L. Rosenfeld: Zur Frage der Meßbarkeit der elektromagnetischen Feldgrößen. Math.-fys. Medd., Danske Vid. Sels. 12, H. 8, 1—65 (1933).

Es wird untersucht, ob die prinzipiellen Grenzen für die Meßbarkeit der elektromagnetischen Feldgrößen mit denen übereinstimmen, die aus der quantenmechanischen Theorie von Heisenberg und Pauli folgen. Insbesondere müßte dann der Wert einer Feldstärke (elektrischer oder magnetischer) mit beliebiger Genauigkeit meßbar sein. Verff. schließen, daß das in der Tat der Fall ist. Früher waren Landau und Peierls zu dem entgegengesetzten Resultat gekommen, was die Verff. darauf zurückführen, daß damals der Begriff der Meßbarkeit einschränkender definiert worden war, als die Verff. es für zweckmäßig halten und daß ferner in sinnvoller Weise nur die Messung von Mittelwerten der Feldgrößen über wohldefinierte Raumzeitgebiete betrachtet werden kann. Die hier vorgenommene Erweiterung des Meßbarkeitsbegriffs betrifft folgenden Umstand: Bei der Messung einer Feldgröße treten unkontrollierbare Effekte auf, die man in einem halbklassischen Modell als von dem Meßapparat verursacht auffassen würde. Verff. identifizieren trotzdem das Ergebnis der Messung mit dem gesuchten Wert der Feldgröße und schreiben also die unkontrollierbare Schwankung der letzteren zu. Das ist logisch möglich, weil die Frage, ob die Feldgröße dieselben Schwankungen haben würde, „wenn der Meßapparat nicht da wäre“, keinen physikalischen Sinn hat. — Ebenso wird nachgewiesen, daß sich prinzipiell mögliche Meßanordnungen angeben lassen, mit denen man zwei Feldgrößen (elektrische und magnetische) oder verschiedene Mittelwerte derselben Feldgröße messen lassen, und daß die dabei auftretenden Grenzen der Genauigkeit mit denen identisch sind, die die Heisenberg-Paulische Theorie verlangt.

R. Peierls (Manchester).

Born, Max: On the quantum theory of the electromagnetic field. Proc. Roy. Soc. London A 143, 410—437 (1934).

1. Die korrespondenzmäßige Übersetzung der klassischen Mechanik in die Quantenmechanik wird dargestellt unter Voranstellung des Hilbertschen „Unabhängigkeits-

satzes“ der Variationsrechnung. Von dieser Darstellung aus ergibt sich ein bequemerer Zugang für die Verallgemeinerung auf die klassische Mechanik und Quantenmechanik eines Kontinuums, in welcher vom klassischen Standpunkt aus Raum und Zeit in symmetrischer Weise als gleichberechtigte unabhängige Variable erscheinen, während vom quantenmechanischen Standpunkt aus diese Symmetrie nicht so klar hervortritt. (Trotzdem besteht diese Symmetrie auch in der Quantenmechanik des Kontinuums, und es kann deshalb das neue Quantelungsverfahren des Verf. nicht zu anderen Ergebnissen führen als die bisherigen diesbezüglichen Untersuchungen.)

2. Es wird — zunächst vom rein klassischen Standpunkt aus — eine Verallgemeinerung der Maxwell'schen Gleichungen (des Vakuums) vorgelegt, durch welche fundamentale Schwierigkeiten der bisherigen Theorie behoben werden. Es wird nämlich die der jetzigen Theorie zugrunde liegende invariante Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2} \dot{F}^2 \equiv \frac{1}{4} F_{kl} F^{kl} \quad F_{kl} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial x^l} - \frac{\partial \Phi_l}{\partial x^k}$$

ersetzt durch

$$L = \frac{1}{a^2} \sqrt{1 + a^2 F} \doteq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2} F + a^2 \dots$$

Das gibt also nichtlineare Feldgleichungen:

$$\text{rot } \mathfrak{E} = \frac{1}{c} \dot{\mathfrak{B}}, \quad \text{div } \mathfrak{B} = 0;$$

$$\text{rot } \mathfrak{H} = -\frac{1}{c} \dot{\mathfrak{D}}, \quad \text{div } \mathfrak{D} = 0;$$

$$\mathfrak{B} = \sqrt{1 + a^2 F} \mathfrak{H}; \quad \mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{1 + a^2 F}}; \quad F = \mathfrak{B}^2 - \mathfrak{E}^2.$$

Mit diesen gelingt die Konstruktion eines Elektrons, dessen Ladung e eine punktförmige Singularität im Vakuumfelde darstellt und welches eine endliche Energie (Raumintegral der Energiedichte im Felde) besitzt, während bekanntlich die bisherige Theorie für ein punktförmiges Elektron eine unendliche Ruhmasse lieferte. Die elektrostatische, kugelsymmetrische Lösung der Feldgleichungen mit einem singulären Quellpunkt $4\pi e$ für \mathfrak{D} ist:

$$\mathfrak{D} = \frac{e}{r^2}; \quad \mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{D}}{\sqrt{1 + a^2 \mathfrak{D}^2}} = -\text{grad } \Phi;$$

$$\Phi(r) = \frac{e}{r_0} \int_{r/r_0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}}; \quad r_0 = \sqrt{ae}; \quad \Phi(0) = \frac{e}{r_0} \cdot 1,85407.$$

3. Es wird die Vermutung ausgesprochen, daß bei der Feldquantelung in dieser Theorie die Wurzel $\sqrt{1 + a^2 F}$ ähnlich wie in der Diracschen Gleichung des Spinelektrons durch antikommutative Matrizen linearisiert wird: $(\gamma_0 + a \gamma_{kl} F_{kl})^2 = 1 + a^2 F$.

P. Jordan (Rostock).

Mieghem, Jacques van: Le système des équations de Dirac et l'équation de Jacobi. C. R. Acad. Sci., Paris **197**, 1289—1291 (1933).

Schreibt man die Diracschen Gleichungen in der fünfdimensionalen Formulierung hin und bildet die Cauchyschen Charakteristiken einer Lösung, so zeigt sich, daß die partielle Differentialgleichung dieser Charakteristiken mit der Jacobischen Differentialgleichung des Elektrons in einem äußeren elektromagnetischen Felde identisch ist. Daraus folgt, daß die Wellenausbreitung in der fünfdimensionalen Welt, die mit der Diracschen Gleichung verbunden ist, durch die Integrale der Jacobischen Gleichung gegeben wird.

Lanczos (Lafayette).

Winter, J.: Les flux électroniques dans les problèmes à plusieurs électrons. J. Physique Radium, VII. s. **4**, 646—649 (1933).

In einem Problem von vielen Elektronen, zwischen denen keine Kräfte bestehen, kann der Ausdruck für die Strom- und Ladungsdichte in eine Summe von Termen zerlegt werden, die nur Eigenfunktionen je eines Elektrons enthalten. Ist die Wechsel-

wirkung schwach, so erhält man mit Hilfe einer Störungsrechnung entsprechende Ausdrücke mit je zwei Elektronen. R. Peierls (Manchester).

Eddington, Arthur: The masses of the proton and electron. Proc. Roy. Soc. London A 143, 327—350 (1934).

Die früheren Untersuchungen des Verf. über die Transformationsverhältnisse der Dirac-Matrizen und seine anschließenden Dimensionsspekulationen werden weiter ausgebaut und werden mit kosmologischen Spekulationen verknüpft. Der Verf. glaubt damit zu begründen, daß die Massen m' , m'' von Proton und Elektron der quadratischen Gleichung

$$10 m^2 - 136 m m_0 + m_0^2 = 0$$

genügen müssen, wobei

$$m_0 = \frac{\hbar \sqrt{N}}{2\pi c \varrho}$$

ist: N bedeutet die Anzahl der Elektronen im Weltall (wofür $N = 1,75 \cdot 10^{79}$ berechnet wird) und ϱ den de Sitterschen Weltradius, der mit der kosmologischen Konstanten λ durch $\lambda = 3/\varrho^2$ zusammenhängt. P. Jordan (Rostock).

Oppenheimer, J. R., and M. S. Plesset: On the production of the positive electron. Physic. Rev., II. s. 44, 53—55 (1933).

Heitler, W., and F. Sauter: Stopping of fast particles with emission of radiation and the birth of positive electrons. Nature 132, 892 (1933).

Vorläufige Mitteilung der Resultate einer, auf Grund der Diracschen relativistischen Theorie des Elektrons und mit Hilfe des Bornschen Näherungsverfahrens durchgeführten Berechnung a) der Wahrscheinlichkeit, daß ein schnelles Elektron beim Zusammenstoß mit einem Kern einen beträchtlichen Teil seiner Energie durch Ausstrahlung verliert und b) der Wahrscheinlichkeit, daß ein γ -Quant in der Nähe eines Kerns verschwindet, während je ein positives und negatives Elektron geboren werden. Für sehr schnelle Elektronen ($E \gg mc^2$) ergibt sich für den ersten Prozeß eine viel größere Wahrscheinlichkeit als mit dem Experiment vereinbar wäre; die Wahrscheinlichkeit für den zweiten Prozeß (das Ergebnis unterscheidet sich um numerische Faktoren von einer von Oppenheimer und Plesset [Phys. Rev. 44, 53] angegebenen Formel) ist größenordnungsmäßig in Übereinstimmung mit der Erfahrung (vgl. vorst. Titel). Casimir (Leiden).

Sextl, Theodor: Bericht über Fragen der Kernphysik. Physik. Z. 35, 119—141 (1934).

Sextl, Theodor: Zur Theorie der Atomzertrümmerung. Z. Physik 87, 105—126 (1933).

Der Prozeß einer Kernzertrümmerung durch geladene Teilchen läßt sich näherungsweise in zwei Teilprozesse zerlegen: 1. Eindringen des (z. B. α -)Teilchens in das Kernfeld, 2. Auslösung eines (z. B. H-)Teilchens zufolge Wechselwirkung des eingedrungenen Teilchens mit den Kernbestandteilen. Liegt die Energie des eindringenden Teilchens niedriger als die Spitze des Gamowberges, so ist die Wahrscheinlichkeit für den zweiten Teilprozeß wesentlich durch einen (exponentiellen) Gamowfaktor gegeben, der nur an den Resonanzstellen fortfällt. — In vorliegender Arbeit wird der Teilprozeß 2. mittels komplexer Eigenwerte eingehend behandelt und es wird ein qualitativer Vergleich mit dem Beobachtungsmaterial gegeben. Von den bisher vorliegenden Ansätzen (Atkinson, Fowler und Wilson, Mott, Beck; vgl. G. Beck im Handb. Radiologie, 2. Aufl.; dies. Zbl. 7, 86) unterscheidet sich die Arbeit durch die konsequente Benutzung der asymptotischen Darstellungen der Eigenfunktionen der eindringenden Teilchen im (abgebrochenen) Coulombfeld. Guth (Wien).

Buchanan, H. E.: Small oscillations of the neutral helium atom near the straight line positions. Amer. Math. Monthly 40, 532—537 (1933).

Berechnung der charakteristischen Gleichung der Variationsgleichung (die konstante Koeffizienten hat). Wintner (Baltimore).

Copel, P.: Les atomes hydrogénéoides dans l'ancienne théorie des quanta. *J. Physique Radium*, VII. s. 4, 638—645 (1933).

Es wird gezeigt, daß die Quantisierung der Keplerbewegung nach der älteren Quantenmechanik eine einfache Form annimmt, wenn man die exzentrische Anomalie als Variable einführt. Der unrelativistische und der relativistische Fall lassen sich in gleicher Weise behandeln.

Nordheim (Paris).

Whitelaw, N. G.: Multiplet separations and perturbed terms. *Physic. Rev.*, II. s. 44, 544—550 (1933).

Es ist lange bekannt, daß manche Serien von Spektraltermen von einer bestimmten Laufzahl an plötzlich weiter werdende Multiplettaufspaltungen zeigen, die dann bei noch höheren Laufzahlen allmählich wieder abklingen. Die Wellenmechanik erklärt diese Erscheinung durch Resonanz mit einem störenden Term von großer Aufspaltung. Aus den in der Arbeit gegebenen Formeln kann man die gestörten Multiplettaufspaltungen berechnen, wenn die totale Verschiebung der Multiplettschwerpunkte gegen ihre ungestörte Lage bekannt ist. Der Vergleich mit dem Experiment fällt bei den $(3\text{ }snf)^3F$ -Termen des Al II befriedigend aus, bei den 2P -Termen des Cu und den $(6\text{ }snf)^3F$ -Termen des Ba I weniger gut.

Bechert (Gießen).

Vleck, J. H. van, and N. G. Whitelaw: The quantum defect of nonpenetrating orbits, with special application to Al II. *Physic. Rev.*, II. s. 44, 551—569 (1933).

Für nicht-eindringende Bahnen besteht die Hauptstörung in der Polarisierung des „Atomrumpfes“ durch das „Leuchtelektron“. Die Hauptaufgabe, die sich die Autoren stellen, ist die, diese Polarisierung genauer zu berechnen, als das bisher geschah. Insbesondere betrachten sie den Fall, wo die Absorptionsfrequenzen des äußeren Elektrons nicht vernachlässigbar klein sind gegen diejenigen des Atomrumpfes. Das ist z. B. bei den Erdalkalien der Fall, weil der „Atomrumpf“ dort ein zweites Leuchtelektron enthält. Bei der rechnerischen Durchführung müssen gewisse mittlere Frequenzen („Centroidfrequenzen“) ausgewertet werden. Die dabei entwickelten Methoden lassen sich auf die Auswertung anderer quantenmechanisch wichtiger Summen übertragen. Von den mannigfachen Ergebnissen der Arbeit erwähne ich die Berechnung der Zahl der Dispersionselektronen für die Resonanzlinien $3s-3p$ von Al III und Si IV. Ferner wird aus dem anomalen Verhalten der $(3\text{ }snf)^1F$ -Serie des Al II die Lage des störenden Terms $(3p3d)^1F$ zu ungefähr 10000 cm^{-1} oberhalb der Seriegrenze berechnet.

Bechert (Gießen).

Ufford, C. W.: Configuration interaction in complex spectra. *Physic. Rev.*, II. s. 44, 732—739 (1933).

Die elektrostatische Wechselwirkung der Elektronen, welche die Abstände der Multipletts bewirkt, die zur gleichen Elektronenkonfiguration eines Atoms gehören, wird für die folgenden Elektronenkonfigurationen berechnet: $(nd)^2 n's$; $(nd)^3$; $nd(n's)^2$. Verf. nimmt dabei an, daß die Koppelungsverhältnisse noch angenähert dem Russell-Saundersschen Grenzfall entsprechen, und gebraucht bei der Berechnung der Elemente der Störungsmatrix die Ergebnisse von Slater, Condon und Shortley. Die Wechselwirkung zwischen Spin und Bahn, welche die Multiplettaufspaltung bedingt, wird ebenfalls bestimmt. Der Vergleich mit Multipletts von Ti II und Zr II ergibt eine befriedigende Übereinstimmung.

R. de L. Kronig (Groningen).

● **Handbuch der Physik.** 2. Aufl. Hrsg. v. H. Geiger u. Karl Scheel. Bd. 24, 2. Tl. Aufbau der zusammenhängenden Materie. Redig. v. A. Smekal. Berlin: Julius Springer 1933. XIII, 1203 S. u. 271 Abb. RM. 126.—.

Herzfeld, K. F.: Größe und Bau der Moleküle. S. 1—252 u. 33 Abb.

Der gegenüber der 1. Aufl. (dort im Bd. 22) weitgehend neu abgefaßte Beitrag berichtet über die theoretischen Gesichtspunkte und Ergebnisse der experimentellen Erforschung der Struktur der Molekeln und der Kräfte in den Molekeln (1. Teil), sowie der Größe der Molekeln und der Kräfte zwischen ihnen (2. Teil). Insbesondere werden

ausführlich dargestellt die Schlüsse aus den dielektrischen Eigenschaften, den Bandenspektren und der Zustandsgleichung der Gase. *F. Hund* (Leipzig).

● **Handbuch der Physik.** 2. Aufl. Hrsg. v. H. Geiger u. Karl Scheel. Bd. 24, 2. Tl. Aufbau der zusammenhängenden Materie. Redig. v. A. Smekal. Berlin: Julius Springer 1933. XIII, 1203 S. u. 271 Abb. RM. 126.—

Grimm, H. G., und H. Wolff: *Atombau und Chemie (Atomehemie)*. S. 923—1136 u. 64 Abb.

Petersen, H.: *La structure fine de l'absorption des rayons X par les gaz moléculaires*. Arch. Néerl. Sci. exact. nat., s. III a 14, 165—218 (1933).

Die Theorie der Feinstruktur in den Röntgenabsorptionsbanden molekularer Gase wird weit genug entwickelt, um einen Vergleich mit experimentellen Daten zu ermöglichen. Nach einer kurzen Übersicht über die zur Zeit bekannten Meßergebnisse wird zunächst auf die praktische Unmöglichkeit hingewiesen, die Röntgenabsorption von Molekülen ähnlich wie die der Atome durch Berechnung der Matrixelemente des elektrischen Moments direkt zu bestimmen. Sodann wird nach einer indirekten Methode eine Formel für das Verhältnis $\kappa(W)$ der Absorption des im Molekül gebundenen Atoms zur Absorption des freien Atoms als Funktion der Energie W des herausgeworfenen Elektrons abgeleitet. In diese Formel gehen die Phasenverschiebungen ein, welche die bei der Streuung einer ebenen Elektronenwelle an den Partnern des Atoms auftretenden Partialwellen erleiden. Mit ihrer Berechnung nach verschiedenen Methoden und mit dem Vergleich zwischen Theorie und Experiment für das Beispiel des Cl_2 befaßt sich der Rest der Untersuchung. *R. de L. Kronig* (Groningen).

Groot, W. de: *Die Lichtemission bei Gasentladungen. II*. Physica 1, 28—34 (1933).

Die Bestimmung der Lichtaussendung einer Entladungsröhre geht von einer Integralgleichung für die Zahl der angeregten Atome aus, welche das Gleichgewicht zwischen den anregenden und den umgekehrten Prozessen (Stöße erster und zweiter Art, Ausstrahlung) ausdrückt. Vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit einer gegenüber älteren Untersuchungen verbesserten Methode der Lösung jener Gleichung.

R. de L. Kronig (Groningen).

Townsend, J. S.: *Distribution of energies of electrons in gases*. Philos. Mag., VII. s. 16, 729—744 (1933).

Es wird die Frage diskutiert, ob bei einer stationären Bewegung von Elektronen in einem Edelgas unter der Wirkung eines elektrischen Feldes die Energien dieser Elektronen, wenn sie eine größere Strecke im Gase zurückgelegt haben, über einen größeren Bereich gestreut sind auch dann, wenn sie ursprünglich alle mit der gleichen Energie von demselben Orte ausgegangen sind, oder ob dies nicht der Fall ist. Auf Grund von gaskinetischen Betrachtungen wird gezeigt, daß schon nach wenigen hundert Zusammenstößen mit den Gasmolekülen die Energie sehr wesentlich um ihren Mittelwert gestreut ist und daß die Streuung mit der Zahl dieser Zusammenstöße zunimmt, um sich schließlich einem stationären Wert zu nähern. Auch eine Reihe von Experimenten über die Glimmentladung spricht durchaus zugunsten dieser theoretischen Ergebnisse. *Fürth* (Prag).

Satô, Mizuho: *Zur Theorie der Brownschen Bewegung auf Grund der Fermischen Statistik*. Z. Physik 86, 667—674 (1933).

In Anlehnung an eine von Zeilinger entwickelte Methode wird versucht, das mittlere Verschiebungsquadrat der Brownschen Bewegung in einem Gas zu berechnen, das der Fermi-Dirac-Statistik genügt und im Sinne dieser Statistik entartet ist. Der Verf. glaubt aus seinen Berechnungen schließen zu dürfen, daß beim absoluten Nullpunkt die Brownsche Bewegung von Null verschieden ist und in seiner Umgebung mit dem Quadrat der absoluten Temperatur zunimmt. Er glaubt ferner, daß es durch Messungen der Brownschen Bewegung bei sehr tiefen Temperaturen möglich sein müsse, auf Grund seiner Formeln die Plancksche Konstante h direkt zu bestimmen. Analoge Betrachtungen werden über die Brownsche Rotationsbewegung angestellt. *Fürth*.

● **Handbuch der Physik. 2. Aufl. Hrsg. v. H. Geiger u. Karl Scheel. Bd. 24, 2. Tl. Aufbau der zusammenhängenden Materie. Redig. v. A. Smekal. Berlin: Julius Springer 1933. XIII, 1203 S. u. 271 Abb. RM. 126.—.**

Sommerfeld, A., und H. Bethe: Elektronentheorie der Metalle. S. 333—622 u. 60 Abb.

Kapitel I (Sommerfeld) gibt eine Zusammenfassung derjenigen Ableitungen und Resultate, die sich schon mit Hilfe der Hypothese von freien Elektronen erklären lassen, und in denen die wesentliche Neuerung gegenüber der klassischen Theorie in der Fermistatistik liegt. Die übrigen Kapitel (Bethe) geben einen Bericht über den Stand der wellenmechanischen Theorie. Kapitel II behandelt diejenigen Resultate, die sich ohne Berücksichtigung (genauer: bei nur schematischer Berücksichtigung) der Wechselwirkung zwischen den Elektronen gewinnen lassen. A. Eigenwerte und Eigenfunktionen (Kinematik von Elektronen in einem periodischen Potentialfeld, Diskussion des in einem Metall herrschenden Potentials, usw.). B. Statistik (Isolator und Leiter, spezifische Wärme). C. Effekte, die nicht von der Wechselwirkung mit den Gitterwellen abhängen (Richardsoneffekt, Volta- und Kontakteffekt, optische Eigenschaften von Metallen, Photoeffekt), Para- und Diamagnetismus, Reflexion von Elektronen an Metallen. D. Elektrische Leitfähigkeit (einschließlich Widerstand von Legierungen, Kritik von Ansätzen für die Erklärung der Supraleitfähigkeit, Halbleiter). E. Kompliziertere Effekte (galvanomagnetische, thermoelektrische, Strahlungseffekte). Kapitel III gibt einen Überblick über die Ansätze zur Behandlung von Problemen, für die die Elektronenwechselwirkung wesentlich ist (Ferromagnetismus, Kohäsionskräfte). *R. Peierls (Manchester).*

● **Handbuch der Physik. 2. Aufl. Hrsg. v. H. Geiger u. Karl Scheel. Bd. 24, 2. Tl. Aufbau der zusammenhängenden Materie. Redig. v. A. Smekal. Berlin: Julius Springer 1933. XIII, 1203 S. u. 271 Abb. RM. 126.—.**

Kronig, R. de L.: Beziehungen zwischen Molekülbau und Kristallbau. S. 253—332 u. 23 Abb.

Der Beitrag ist gegenüber der 1. Aufl. neu. Er gibt eine auf den zwischenatomaren Kräften beruhende Einteilung der Kristallgittertypen und ihre Beziehung zu den Formen der Molekeln. Er stellt weiter dar die Veränderungen, die Atome im Molekel- oder Gitterverband gegenüber dem freien Zustand erfahren, und die daraus folgenden Eigenschaften der Kristalle. *F. Hund (Leipzig).*

● **Handbuch der Physik. 2. Aufl. Hrsg. v. H. Geiger u. Karl Scheel. Bd. 24, 2. Tl. Aufbau der zusammenhängenden Materie. Redig. v. A. Smekal. Berlin: Julius Springer 1933. XIII, 1203 S. u. 271 Abb. RM. 126.—.**

Born, M., und Maria Göppert-Mayer: Dynamische Gittertheorie der Kristalle. S. 623—794 u. 38 Abb.

Der vorliegende Artikel behandelt zusammenfassend die Ergebnisse der Gittertheorie der Kristalle mit sehr ausführlichen Literaturangaben. Die Grundzüge der mathematischen Entwicklung werden überall gegeben, doch unter Verzicht auf weitergehende Einzelheiten oder Durchrechnung schwierigerer Spezialfälle, die nur referiert werden. Dafür werden Dimensionsbetrachtungen und thermodynamische Überlegungen stets ausführlich dargestellt und überall der Anschluß an die Erfahrung diskutiert. Im wesentlichen wird die Theorie auf klassischer Grundlage aufgebaut, die hier zum größten Teil ausreicht, und nur die speziellen Kraftansätze, Oszillatorenstärken usw. aus der Quantenmechanik übernommen. — Der Inhalt gliedert sich in folgende Kapitel: I. Gleichgewicht und homogene Verzerrung (grundlegende Begriffe, Elastizitätstheorie, Dielektrizität und Piezoelektrizität). II. Gitterschwingungen (eindimensionales Gitter, freie und erzwungene Schwingungen, Verteilungsgesetz, experimentelle Bestimmung der Grenzfrequenzen und Zusammenhang mit anderen Kristalleigenschaften). III. Optik (phänomenologische Behandlung der Kristalloptik, Dispersion, optische Aktivität). IV. Thermodynamik (klassische, Debyesche und Gittertheorie der Atomwärmen, Zustandsgleichung, freie Energie, thermische Ausdehnung, Sublimation, Schmelzen, irreversible Vorgänge). V. Elektrostatistische Gittertheorie (Gitterpotentiale, Berechnung von Parametern, Abstoßungspotentiale, Gitterenergie, elastische Eigenschaften, Stabilität). VI. Gittertheorie des polarisierbaren Ions (Polarisierbarkeit von Ionen und Molekülbau, Stabilität von Gittern,

van der Waals'sche Kohäsion, homöopolare Bindung). VII. Oberflächenenergie und Zerreiẖfestigkeit (Oberflächenenergie und Tracht von Kristallen, Zerreiẖfestigkeit und Mosaikstruktur). VII. Elektromagnetische Gitterwellen (atomare Begründung der Kristalloptik, Doppelbrechung, Röntgenoptik). Der ganze Bericht gibt eine eindringliche Übersicht über die groẖe, auf diesem Gebiet geleistete Arbeit.

Nordheim (Paris).

Landau, L.: Eine mögliche Erklärung der Feldabhängigkeit der Suszeptibilität bei niedrigen Temperaturen. *Physik. Z. Sowjetunion* 4, 675—679 (1933).

Einige Salze von Übergangsmetallen zeigen einen besonderen Typ von Paramagnetismus, der bei gewöhnlicher Temperatur stärkere Temperaturabhängigkeit besitzt, als dem Curiegesetz entspricht, während trotzdem bei tiefer Temperatur kein Ferromagnetismus auftritt, sondern nur eine Feldabhängigkeit der Suszeptibilität. Zur Deutung dieses Verhaltens wird auf Grund der Tatsache, daẖ bei diesen Salzen die paramagnetischen Ionen in Schichten liegen, folgende Vorstellung entwickelt: Innerhalb einer Schicht ist die gegenseitige Orientierungskraft der Spins positiv (spontane Magnetisierung; Curiepunkt); zwischen benachbarten Schichten dagegen hat die Wechselwirkungskraft negatives Vorzeichen und erheblich kleineren Betrag, so daẖ die gegenseitige Antiparallelstellung der Momente verschiedener Schichten, die im feldfreien Zustand vollständig ist, bereits durch verhältnismäẖig schwache äußere Felder stark beeinfluẖt wird. Zur quantitativen Durchführung der Theorie wird ein dementsprechender Ansatz für die freie Energie gemacht, und daraus wird die Suszeptibilität oberhalb und unterhalb des Curiepunktes berechnet, für die sich tatsächlich das geforderte Verhalten ergibt; für niedrige Temperaturen folgt besonders starke Anisotropie der Suszeptibilität.

E. Vogt (Marburg, Lahn).

Drigo, Angelo: Problemi e tendenze attuali nello studio del ferromagnetismo. *Atti Mem. Accad. Sci. Padova*, N. s. 49, 239—250 (1933).

Franchetti, Simone: Sull'energia di oscillazione delle particelle in un reticolato cristallino. *Ist. Lombardo, Rend. II. s.* 66, 731—742 (1933).

Bei einer adiabatischen Volumenvergrößerung nimmt die Energie eines Kristalls ab. Aus einem schematischen Ansatz für die anharmonischen Kräfte wird geschlossen, daẖ der Schwingungsanteil der potentiellen Energie dabei zunimmt. *R. Peierls*.

Laschkarew, W. E.: Zur Bestimmung des inneren Potentials aus Elektronenbeugung. *Z. Physik* 86, 797—801 (1933).

Die gewöhnliche Formel zur Bestimmung des mittleren Potentials im Gitter aus Beugungsversuchen, die unter der Annahme von streuenden punktförmigen Zentren in einem sonst konstanten Potential abgeleitet ist, ist gewöhnlich keine gute Näherung. Die Abweichungen davon werden an einem Fall studiert, in dem das Potential nur von der Koordinate senkrecht zur Oberfläche abhängt und in dem die Näherung der geometrischen Optik anwendbar ist. Es wird für diesen Fall gezeigt, daẖ das aus der Beugung bestimmte Gitterpotential für verschiedene Ordnungen der Reflexion verschieden, und zwar im allgemeinen kleiner ist, als der wirkliche Mittelwert des Potentials im Gitter.

R. Peierls (Manchester).

Fujioka, Yoshio: On the dispersion theory in metallic conductors. II. *Sci. Pap. Inst. Physic. Chem. Res.* 22, 202—215 (1933).

Die quantenmechanische Theorie der Dispersion in metallischen Leitern wird weiter entwickelt. Verf. geht dabei von den Arbeiten von Kronig und einer eigenen Arbeit aus, in welchen nach Bloch die Metallelektronen als in einem periodischen Kraftfeld beweglich angenommen werden. Gegenüber diesen Untersuchungen wird der Einfluẖ der Dämpfung, die von den Zusammenstößen zwischen den Elektronen und dem Kristallgitter herrührt, genauer in Rechnung gebracht, vor allem im Gebiet der optischen Absorptionsbanden. Ein Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen für Silber wird durchgeführt (vgl. dies. Zbl. 4, 383).

R. de L. Kronig (Groningen).